Thomas Cometx

CHAPITRE 15

Polynômes

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Polynôme à coefficients réels

Un **polynôme** (ou fonction polynomiale) à coefficients réels est une fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle qu'il existe un entier n et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que pour tout réel x

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Les réels a_k sont appelés les **coefficients** du polynôme.

Remarque 1.1 — La construction formelle des polynômes (pas au programme) fait que l'on note usuellement la variable d'un polynôme X (avec une majuscule), c'est à dire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Avec cette notation, le polynôme X^k est la fonction $f : x \mapsto x^k$.

En classe préparatoire ECG, on ne fera pas de distinction entre le polynôme et la fonction associée : on favorisera donc l'utilisation de la notation x^k.

Notation

L'ensemble des polynômes réels est noté $\mathbf{R}[x]$.

Définition 2 | Degré d'un polynôme

- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme avec $a_n \neq 0$, on dit que P est un polynôme de **degré** n. On le note $deg(P) = n$. Par convention, le degré du polynôme nul est $deg(0) = -\infty$.
- a_n est le **coefficient dominant** du polynôme.
- Un polynôme est **unitaire** si son coefficient dominant est 1.

Exemple 1 —

1. Le degré du polynôme $P = 5$ (polynôme constant égal à 5 est 0).
2. Le degré du polynôme $x^{10} + x^5 - 3$ est 10.
3. Le degré du polynôme $(c^2-1)x^2 + (c-1)x + 20$ dépend du paramètre réel c. Cela peut être 2, 1 ou 0.

Définition 3 | Espace $\mathbf{R}_n[x]$

On note $\mathbf{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Formellement il s'écrit

$$R_n[x] = \{P(x) \in R[x], \deg(P) \leqslant n\}.$$

Proposition 1

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}_n[x]$. Alors il existe des uniques $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k.$$

Remarque 1.2 — On dit que les polynômes $(x^k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ forment une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

Théorème 1 | Théorème d'identification des coefficients

1. Si un polynôme vérifie que pour tout réel x, $P(x) = 0$, alors tout ces coefficients sont nuls.
2. Si pour tout x, $P(x) = Q(x)$, alors les polynômes P et Q ont les mêmes coefficients.

2. OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

Sur les polynômes, on peut faire les mêmes opérations usuelles que sur les fonctions : l'addition (ou des combinaisons linéaires), la multiplication et la composition.

Méthode *(Addition de polynômes)*

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k$ deux polynômes réels. $P + Q$ est le polynôme

$$(P+Q)(x) = \sum_{k=1}^{\max(m,n)} (p_i + q_i)x^i$$

où on a complété par des 0 les a_i et b_i non définis. On retiendra que le coefficient de degré i de $P + Q$ est $p_i + q_i$.

Exemple 2 — Calculer les sommes $P+Q$ avec

1. $P(x)=5x^2+3x+1$ et $Q(x)=-x^2+4$,
2. $P(x)=(x-1)^2$ et $Q(x)=-(x+1)^2$.

Méthode *(Multiplication de polynômes)*

$P=\sum_{k=0}^{n}p_kx^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{m}q_kx^k$ deux polynômes réels. P+Q est le polynôme donné par $PQ(x)=P(x)\times Q(x)$. Formellement on a

$$\begin{aligned} PQ(x) &= \sum_{k=0}^{n}p_kx^k \times \sum_{k=0}^{m}q_kx^K \\ &= \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{j=0}^{k}p_jq_{k-j}x^k. \end{aligned}$$

Exemple 3 — Calculer les produits $P\times Q$ avec

1. $P(x)=3x^2+2x+1$ et $Q(x)=x^4-1$,
2. $P(x)=x-1$ et $Q(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$.

Méthode *(Composition de deux polynôme)*

Soient $P=\sum_{k=0}^{n}p_kx^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{m}q_kx^k$ deux polynômes réels. Le polynôme composé $P\circ Q$ est défini par

$$\begin{aligned} P\circ Q(x) &= P(Q)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}p_k\left(\sum_{j=0}^{m}q_jx^j\right)^k \end{aligned}$$

Exemple 4 — Calculer $P\circ Q$ et $Q\circ P$ avec

1. $P(x)=x^2$ et $Q(x)=x+1$,
2. $P(x)=1$ et $Q(x)=x^3-2$.

Proposition 2 | Lien avec le degré

Soient P et Q deux polynômes, alors

1. $\deg(P+Q)\leqslant \max(\deg P,\deg Q)$. Si les deux polynômes sont de degrés différents, on a égalité. Sinon, il faut vérifier.
2. $\deg PQ=\deg P+\deg Q$. Le coefficient dominant est le produit des coefficient dominants.
3. $\deg P\circ Q=\deg P\times\deg Q$. Le coefficient dominant est le produit des coefficients

dominants.

Proposition 3

Soit $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[x]$ est un espace vectoriel, c'est à dire que

1. $0 \in \mathbf{R}_n[x]$,
2. Si $P \in \mathbf{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda P \in \mathbf{R}_n[x]$,
3. Si $P \in \mathbf{R}_n[x]$ et $Q \in \mathbf{R}_n[x]$, alors $P + Q \in \mathbf{R}_n[x]$.

Exemple 5 —

1. Si $P = x^2 + 1$ et $Q = x^3 + x$. $\deg P = 2$ et $\deg Q = 3$ et $\deg P + Q = 3$.
2. Si $P = X^2 + 2x$ et $Q = -x^2 + 12$, $P + Q = 2x + 1$. On a bien $\deg P + Q < 2$.
3. Si $P = x^2 + 1$ et $Q = x^3 + x$, $PQ = x^5 + 2x^3 + x$. $\deg PQ = 5 = 2 + 3 = \deg P + \deg Q$,
4. Si $P = 2x^2$ et $Q = x^3 + 2x$, on a $P \circ Q = 2(x^3 + 2x)^2 = 2x^6 + 8x^4 + 8x^2$ de degré 6 qui correspond bien à $\deg P \times \deg Q = 2 \times 3$.

Corollaire 1

Si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

3. DÉRIVATION DE POLYNÔMES

Définition 4 | Polynôme dérivé

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbf{R}[x]$, on définit son polynôme dérivé

$$\begin{aligned} P'(X) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k \end{aligned}$$

Exemple 6 — Calculer $P'(x)$ avec

1. $P(x) = x^3 - 1$,
2. $P(x) = \sum_{k=0}^{n} k x^k$.

Remarque 3.1 — Cette définition coïncide avec la dérivation sur les fonctions.

Proposition 4 | Opérations sur les dérivées

Soient $(P,Q) \in \mathbf{R}[x]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$,

1. $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$
2. $(PQ)' = P'Q + Q'P$,
3. $(P \circ Q)' = Q \times (P' \circ Q)$,
4. $P' = 0 \iff P$ est un polynôme constant.

Proposition 5 | Degré du polynôme dérivé

1. Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}^*$, alors $\deg P' = n - 1$.
2. Si P est constant (de degré 0 ou $-\infty$, alors $P' = 0$ et $\deg P' = -\infty$.

Définition 5 | Dérivées d'ordre supérieur

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$, les dérivées successives de P sont les polynômes définis par

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } k = 0 \\ P'(x) & \text{si } k = 1 \\ (P^{(k-1)})'(x) & \text{si } k > 1 \end{cases}.$$

Exemple 7 — Calculer la dérivée du polynôme

$$P(x) = 1 + x^2 + 5x^5 + \frac{x^4}{12}.$$

Exemple 8 — ***Dérivées des monômes*** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(x) = x^n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

Théorème 2

Si $P \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme de degré n, alors

$$\forall k > n, P^{(k)}(x) = 0.$$

En particulier $P^{(n+1)}(x) = 0$.

4. DIVISION EUCLIDIENNE

Théorème 3 | Division euclidienne de polynômes

Soient A et B deux polynômes réels, alors il existe deux uniques polynômes réels Q et R avec $\deg(Q) < \deg(B)$ tels que

$$P = QA + R.$$

On appelle Q le quotient de la division euclidienne de A par B et R son reste.

Méthode *(Réaliser une division euclidienne de polynômes)*

On souhaite réaliser la division euclidienne de A par B. Il s'agit de trouver le quotient Q et le reste R. On vérifie d'abord le cas trivial où $\deg(A) < \deg(B)$ auquel cas la division euclidienne est donnée par

$$A = 0 \times B + A,$$

donc $Q = 0$ et $R = A$.

Dans le cas général, on rédige comme une division euclidienne d'entiers en cherchant les coefficients du polynôme Q en commençant par celui de degré $\deg(A) - \deg(B)$ (qui est le degré de Q) puis en descendant.

Exemple 9 —

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -2x^2 & +x & +3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +6x^2 & -6x & & 6x + 4 \\ \cline{1-3}
 & 4x^2 & -5x & +3 & \\
 & -4x^2 & +4x & -4 & \\ \cline{2-4}
 & & -x & -1 &
\end{array}$$

Exemple 10 — ***Réaliser la division euclidienne de*** A ***par*** B ***et*** B ***par*** A ***où*** $A = 5x^3 + 2x^2 + 1$ ***et*** $B = x^2 + 10x$.

Proposition 6 | Exemples à connaître

La reste de la division euclidienne d'un polynôme P par

1. un polynôme de degré 1, $B(x) = ax + b$ est $R = P(\frac{-b}{a})$ (polynôme constant),
2. le polynôme $(x - a)$ $(a \in \mathbf{R})$ est $P(a)$ (polynôme constant),
3. le polynôme $(x - a)^2$ $(a \in \mathbf{R})$ est le polynôme $R(x) = P'(a)x + P(a)$.

Exemple 11 — Avec des méthodes analogues, retrouver le reste de la division de P par $(x-a)(x-b)$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ sont des réels distincts.

Définition 6

Soit $A \in \mathbf{R}[x]$ et $B \in \mathbf{R}[x]$. On dit que B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul. Alors il existe un polynôme Q tel que $A = QB$.

5. FORMULE DE TAYLOR

Les polynômes de degré n sont définis par $n+1$ coefficients. En quelque sorte, cela nous dit qu'on a $n+1$ degrés de liberté pour fixer un polynôme de $\mathbf{R}_n[x]$. On peut faire porter ces degrés de liberté sur d'autres nombres, comme les $P(a_i)$ des réels fixés $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ (voir l'interpolation de Lagrange en TD) ou les $P^{(k)}(a)$ où $a \in \mathbf{R}$ est fixé et $k \in [\![0, n]\!]$. C'est le sujet sur prochain théorème.

Théorème 4

Soit $P \in \mathbf{R}_n[x]$ et $a \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned} P(x) &= P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

6. RACINES D'UN POLYNÔME

6.1. Racines

Définition 7 | Racine d'un polynôme

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. On dit que α **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 12 —

1. Les racines de $x^2 - 1$ sont 1 et -1.
2. $x^4 + x^2 + 15$ n'a pas de racine.
3. $P = 5$ n'a pas de racine.
4. $P = 5(x-1)(x-2)(x+2)$ a trois racines : $1, 2, -2$.

5. $P = 12x^2(x-3)$ a deux racines 0 et 3.
6. $P = 0$ a une infinité de racine. C'est le seul polynôme à avoir une infinité de racine.

Théorème 5 | Factorisation par une racine

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on a l'équivalence

$$P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbf{R}[x], P(X) = (x-\alpha)Q(x).$$

Autrement dit, α est une racine de P si et seulement si $(x-a)$ divise P.

Remarque 6.1 — Le théorème se généralise avec plusieurs racines.

$$\alpha_1, \dots \alpha_n \text{ sont des racines de P} \iff \exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)Q(x).$$

On a vu dans un chapitre précédent comment factoriser un polynôme quand on a trouvé une de ses racines. Rappelons comment on peut faire :

1. Si $P = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ est un polynôme **de degré** n et si $P(\alpha) = 0$, alors on cherche à écrire

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) \text{ avec } Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k.$$

   On développe le produit et en identifiant coefficient à coefficient, on établit un système dont la résolution donne les réels q_k. Il peut être utile de remarquer qu'en étudiant les termes de degré n et 0 on trouve rapidement $q_{n-1} = p_n$ et $p_0 = \alpha q_0$.
2. Autre solution, on réalise la division euclidienne de P par $(X-\alpha)$. La quotient donne Q et on peut vérifier ne pas avoir fait d'erreurs de calculs en obtenant un reste nul.

Exemple 13 — ***Factoriser le polynôme*** $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$

Définition 8 | Multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et α une racine de P. L'ordre de multiplicité de la racine α est le plus grand entier $k \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$$

ou de façon équivalente l'unique entier k tel que

$$\exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = (x-\alpha)^k Q(x) \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

Vocabulaire

1. Une racine d'ordre 1 est appelée une **racine simple**,
2. Une racine d'ordre 2 est appelée une **racine double**,
3. Une racine d'ordre 3 est appelée une **racine triple** …

Exemple 14 —

1. $P(X) = (x-3)^2(x-2)^{1000}$ admet 3 pour racine de multiplicité 2 et 2 pour racine de multiplicité 1000.
2. $P(x) = x^2 - 6x + 9$ admet une seule racine double, c'est 3.
3. $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$ admet deux racines simples : 1 et 2.

Théorème 6 | Lien multiplicité - dérivées

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et α une racine de P. On a l'équivalence

$$\alpha \text{ est une racine d'ordre } k \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(n)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 15 — Soit $P = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16X - 4$. Montrer que 1 est une racine de multiplicité 3 de P. Ensuite, factoriser P.

Théorème 7

Soit P un polynôme de degré n et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ses racines de multiplicité respectives $k_1, \ldots, k_n$. On a

$$\sum_{i=1}^{k} k_i \leqslant n.$$

On en déduit le corollaire suivante **très important**.

Corollaire 2

Si $P \in \mathbf{R}_n[x]$ a au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$.

Exemple 16 — Soit P un polynôme de degré n tel que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $P(k) = k^2$. Montrer que $P(x) = x^2$.

Corollaire 3

Si $P \in \mathbf{R}_n[x]$ a la somme de multiplicité de ses racines strictement plus grande que n, alors $P = 0$.

6.2. Factorisation de polynômes réels

On connait explicitement la factorisation des polynômes réels.

Théorème 8 | Factorisation des polynômes réels

Tout polynôme réel $P \in \mathbf{R}[x]$ peut s'écrire

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{p} (x^2 + b_i x + c_i)$$

où

- les α_i sont les racines réelles de P, de multiplicité $k_i \in \mathbf{N}^*$,
- les polynômes $x^2 + b_i x + c_i$ sont des trinômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.