Thomas Cometx

CHAPITRE 16

Calcul matriciel

1. MATRICES RECTANGULAIRES

1.1. Définitions

Définition 1 | Ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$

Soient n et p des entiers naturels. Une matrice rectangulaire de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

Si $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, on note usuellement $m_{i,j}$ ses coefficients. On note aussi

$$\mathrm{M} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

La matrice se note

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \cdots & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1 —

1. une matrice de $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbf{R})$:
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -6 \\ 83 & 82 & 106 \end{pmatrix}.$$
2. une matrice de $\mathrm{M}_{3,4}(\mathbf{R})$:
$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. une matrice "carrée" de $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \pi & -\frac{3}{2} \\ 0,5 & e^{-3} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1 — Une matrice de $\mathrm{M}_{1,1}(\mathbf{R})$ est un nombre réel!

Vocabulaire ***(Matrices particulières)***

On distinguera particulièrement :
1. les matrices **carrées**, qui ont autant de ligne que de colonnes.
2. les matrices colonnes, qui ont une seule colonne, et donc appartiennent à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ pour un certain $n \in \mathrm{N}^*$. Dans ce cas là, on parlera aussi de **vecteur colonne** ou tout simplement de **vecteur**. L'espace $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est en bijection évidente avec $\mathbf{R}^n$.
3. les matrices lignes, qui ont une seule ligne, et donc appartiennent à $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ pour un certain $n \in \mathrm{N}^*$. Dans ce cas là, on parlera aussi de **vecteur ligne**. L'espace $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est en bijection évidente avec $\mathbf{R}^n$.

2. OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

On peut faire plusieurs opérations sur les matrices : multiplication par un scalaire, addition, et même multiplication de matrices.

Multiplication par un scalaire. Si $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est une matrice et $\lambda \in \mathbf{R}$, la matrice $\lambda\mathrm{M}$ est définie par

$$(\lambda\mathrm{M})_{i,j} = \lambda m_{i,j}.$$

On multiplie en fait tous les coefficients par λ.

Somme de matrices. Si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})^2$ sont des matrices de même dimensions, alors on peut les additionner :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})_{i,j} = \mathrm{A}_{i,j} + \mathrm{B}_{i,j}.$$

Produit de matrices. On ne peut pas multiplier n'importe quelles matrices. On peut le faire sous certaines conditions : soit n, m, p des entiers, $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m,p}$ alors on définit la matrice $AB \in M_{n,p}$ par

$$(A \times B)_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Remarque 2.1 — Si on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de B, alors le coefficient $(AB)_{i,j}$ est le produit $L_i C_j$.

Remarque 2.2 — Avec les mêmes notations, la matrice AB est la matrice dont les colonnes sont les produits AC_j.

Proposition 1

Le produit matriciel est associatif : si $A \in M_{n,p}, B \in M_{p,m}, C \in M_{m,\ell}$ alors

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

On notera donc simplement ce produit ABC ou $A \times B \times C$.

Proposition 2

La multiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition : si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, A \in M_{n,m}(\mathbb{R}), B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{m,p}(\mathbb{R})$alors

$$(\lambda A + B) \times (\mu C + D) = \lambda\mu AC + \lambda AD + \mu BC + BD.$$

Attention

La multiplication matricielle n'est pas commutative : a priori on ne peut pas écrire AB = BA pour plusieurs raisons.

1. Les dimensions pourraient ne pas être les bonnes !
2. Même si elles sont bonnes, le calcul ne donne pas le même résultat en général.

Transposée d'une matrice.

Définition 2 | Transposée d'une matrice

Si $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on peut définir la transposée de M par ${}^tM \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times \in [\![1,m]\!], ({}^tM)_{i,j} = M_{j,i}.$$

En pratique, les colonnes de M deviennent les lignes de ${}^tM$.

Exemple 2 —

Proposition 3

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbf{R})$ et $B \in M_{p,m}(\mathbf{R})$ alors

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

3. MATRICES CARRÉES

3.1. Ensemble des matrices carrées

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul.

Définition 3 | Ensemble $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n, $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, sera noté plus simplement $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

Définition 4

On définit les matrices particulières suivantes :

1. La matrice nulle O_n dont tous les coefficients valent 0.
2. La matrice I_n dont les coefficients valent 1 si $i = j$ et 0 sinon.

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Les matrices de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$ sont appelées **matrices scalaires.**

Proposition 4

Soient A, B des matrices carrées d'ordre n et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

1. $\mathrm{A} + \lambda \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$,
2. $\mathrm{AB} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

Proposition 5

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$:

1. $\mathrm{O}_n\mathrm{A} = \mathrm{AO}_n = \mathrm{O}_n$,
2. $\mathrm{I}_n\mathrm{A} = \mathrm{AI}_n = \mathrm{A}$.

Définition 5 | Puissances d'une matrice carrée

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On définit les puissances de A par :

1. I_n si $k = 0$,
2. sinon, $\mathrm{A}^k = \mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \cdots \times \mathrm{A}$ (k fois).

Définition 6 | Polynôme d'une matrice carrée

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $M \in M_n(\mathbf{R})$, on définit $P(M)$ par

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} p_k A^k$$

où

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} p_k x^k.$$

Définition 7 | Matrices qui commutent

Soit A et B deux matrices carrées de taille n. On dit que A et B commutent si $AB = BA$.

Exemple 3 —

1. O_n commute avec toutes matrices de $M_n(\mathbf{R})$,
2. I_n commute avec toutes matrices de $M_n(\mathbf{R})$,
3. Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ alors A commute avec tout polynôme matriciel en A :

$$AP(A) = P(A)A.$$

3.2. Familles particulières de matrices

Définition 8 | Matrices triangulaires

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$.

1. A est triangulaire supérieure si tous ses coefficients en dessous de la diagonale sont nuls :

$$j > i \Rightarrow A_{i,j} = 0.$$

2. A est triangulaire inférieure si tous ses coefficients en dessous de la diagonale sont nuls :

$$j < i \Rightarrow A_{i,j} = 0.$$

Proposition 6

Soient A, B des matrices triangulaires supérieures (respectivement triangulaires

inférieures) et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$A + \lambda B$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure)

et

$A \times B$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure)

donc les coefficients diagonaux sont les produits de ceux de A et B.

Remarque 3.1 — On dit que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est stable par combinaison linéaire et produit.

Définition 9 | Matrices diagonales

Une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est **diagonale** si tous ses coefficients hors diagonale sont nuls :

$$i \neq j \Rightarrow A_{i,j} = 0.$$

Proposition 7

Soient A, B des matrices diagonales et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$A + \lambda B$ est une matrice diagonale.

Remarque 3.2 — A est diagonale si et seulement si elle est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Définition 10 | Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$.
1. A est une matrice symétrique si ${}^tA = A$.
2. A est une matrice antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Proposition 8

Soient A, B des matrices symétriques (resp antisymétrique) et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$A + \lambda B$ est une matrice symétrique (resp. antisymétrique).

Proposition 9

Une matrice antisymétrique a ses coefficients diagonaux nuls.

Proposition 10

Toute matrice carrée se décompose de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3.3. Matrices inversibles

Définition 11 | Matrice inversible

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbf{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Vocabulaire

Une telle matrice B est appelée **matrice inverse** de la matrice A ou **inverse de** A.

Proposition 11

S'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ alors l'autre condition est automatiquement remplie et alors l'inverse à gauche et l'inverse à droite sont les mêmes. De plus, l'inverse d'une matrice carrée est unique.

Remarque 3.3 — Résultat admis.

Proposition 12

Si A admet une inverse, alors cette inverse est unique.

Notation

L'inverse d'une matrice A sera noté A^{-1}.

Proposition 13

Si A et B sont des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ inversibles alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition 14

Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est inversible alors ${}^tA$ aussi et

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Autrement dit l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.

Théorème 1 | Inverse d'une matrice diagonale

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale. On a l'équivalence

$$A \text{ est inversible} \iff \text{tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls.}$$

Dans ce cas, l'inverse de A est la matrice diagonale de coefficients inverses de ceux de A.

Théorème 2 | Inverse d'une matrice triangulaire

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Alors A est inversible et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Son inverse est alors une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.

Théorème 3 | Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a l'équivalence

$$A \text{ est inversible} \iff ad - bc \neq 0.$$

Auquel cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.4 — La quantité $ad-bc$ est appelée le **déterminant de** A. On le note parfois $\det(A)$.

4. INTERPRÉTATION MATRICIELLE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Soit (S) un système linéaire $n \times p$ avec les notations habituelles. On introduit les matrices rectangle et colonnes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si on transforme les inconnues en un vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},$$

alors le système se réécrit comme l'unique équation matricielle.

$$AX = B.$$

4.1. Reformulation des différents cas

Pour les systèmes homogènes. Le cas du système homogène se présente quand le vecteur B est le vecteur nul. Le système s'écrit alors

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où l'inconnue est le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Il a toujours au moins une solution, c'est le vecteur nul. L'autre alternative est qu'il y ait une infinité de solution. C'est **toujours le cas** si $n > p$.

L'ensemble des solutions est un **sous espace vectoriel** de $M_{p,1}(\mathbf{R})$ c'est à dire que

- le vecteur nul est solution
- si X_1, X_2 sont des solutions et si λ est un réel, alors $X_1 + \lambda X_2$ est aussi une solution.

Pour les systèmes non homogènes. C'est le cas général, où B est un vecteur non nul (c'est à dire qu'il a au moins un coefficient non nul).

1. Si le système homogène associé a la solution nulle comme unique solution, alors le système a soit une unique solution, soit aucune.
2. Si le système homogène associé a une infinité de solution, alors on a l'alternative :
   - si le système a au moins une solution X_0, alors l'ensemble de ses solutions est

     $\{X_0 + H, \text{ où } AH = 0 \text{ c'est à dire que H est une solution de l'équation homogène.}\}$

     On a alors une infinité de solution.
   - Autre cas, le système n'a aucune solution.

4.2. Inversion de matrice et système linéaire

Théorème 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbf{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est inversible.
2. Pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = B$ a une unique solution dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, le système

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \quad (L_2) \\ \cdots\cdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

a une unique solution dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas là, la solution est donnée par le vecteur

$$X = A^{-1}B.$$

Ce théorème à une application directe, le calcul de l'inverse d'une matrice par le pivot de Gauss.

Méthode *(Inverser une matrice par pivot de Gauss)*

La méthode passe par la résolution simultanée des équations

$$AX = e_i$$

où e_i est le vecteur colonne qui vaut 1 à la i-ème ligne et 0 ailleurs.

Étape 1. On écrit la matrice A à coté de la matrice identité.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \vdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A pour la transformée en une matrice triangulaire supérieure. On effectue en même temps les mêmes opérations sur la matrice identité à droite.

Si cette opération échoue, c'est à dire qu'on obtient un coefficient diagonal nul, alors on peut conclure que la matrice n'est pas inversible

Si l'opération a réussi, la matrice est inversible : en effet, le système carré se ramène à un système triangulaire supérieur avec des coefficients diagonaux non nuls : il y aura une unique solution. Il ne reste plus qu'à faire quelques calculs pour trouver l'inverse.

Étape 2. Si on n'a pas échangé de ligne et qu'on a "éliminé les inconnues" de la gauche vers la droite (ce qui est conseillé), alors la matrice obtenue à gauche des triangulaire supérieure, et celle obtenue à droite est triangulaire inférieure. Désormais on va faire des **opérations élémentaires sur les lignes** pour transformer la matrice de gauche en matrice diagonale. On commence dans l'autre sens en éliminant d'abord les coefficients dans la colonne de droite, puis on se décale vers la gauche. On fait à chaque fois les mêmes opérations sur la matrice de droite.

Étape 3. La matrice maintenant obtenue à gauche est diagonale à coefficients non nuls. On fait des opérations de multiplications sur les lignes pour la rendre égale à I_n. On fait les même à droite. La matrice obtenue à droite est A^{-1}.

Exemple 4 —

1. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.
Étape 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opération : $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{2}L_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -9 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On a obtenu une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, on peut en déduire que la matrice est inversible.
Étape 2. On repart du haut vers le bas. Opérations : $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_1 - 2L_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -17 & 5 & 2 \\ 16 & -4 & -2 \\ -9 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On a fini, on a une matrice diagonale. On n'a pas à faire d'étape supplémentaire car le coefficient rouge est égal à 0. Sinon il faudrait faire une opération du type $L_1 \leftarrow L_1 + \alpha L_2$.
Étape 3. Il nous reste les opérations de normalisation : $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$, $L_3 \leftarrow -2L_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -17 & 5 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 5 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.1 — Dans le cours on a volontairement choisi une matrice qui avoir une inverse à coefficient entier. En toute généralité, une matrice a coefficient entier a très rarement une inverse à coefficients entiers.

2. Montrer que la matrice B n'est pas inversible où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Essayons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opération : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a bien échelonné la matrice B, et elle contient un coefficient diagonal nul. On peut en déduire qu'elle n'est pas inversible.

Théorème 5

La méthode d'inversion d'une matrice carrée par pivot de Gauss réussit si et seulement si la matrice est inversible. Auquel cas la matrice obtenue à droite est A^{-1}.

Remarque 4.2 — Un pivot de Gauss peut aussi être fait sur une matrice rectangulaire, il sert alors à déterminer le **rang de la matrice**. Nous verrons cela au prochain semestre !