Thomas Cometx

CHAPITRE 17

Introduction aux espaces vectoriels

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Espace vectoriel

Un **espace vectoriel** (sur $\mathbf{R}$) est un ensemble non vide muni

- d'une loi de composition interne $+$: si $x, y \in \mathrm{E}^2$, alors $x+y \in \mathrm{E}$. Cette loi est commutative, associative, admet un neutre $\mathrm{O_E}$ et tout élément de $u \in \mathrm{E}$ admet un inverse $-u$
- d'une multiplication par un réel : si $x \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda x \in \mathrm{E}$. La multiplication par un scalaire doit être distributive par rapport à l'addition :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y.$$

Vocabulaire

Un élément d'un espace vectoriel s'appelle un **vecteur**.

Exemple 1 — *L'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^n$*

L'espace vectoriel "de base" des $\mathbf{R}^n$. On se rappelle qu'on l'a muni d'une addition définie par

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

ainsi que d'une multiplication par un scalaire

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Exemple 2 — *L'espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,1}(\boldsymbol{R})$.*

$\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel :

- on sait déjà faire des additions de matrices, et de vecteurs de colonnes

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

- le neutre est le vecteur nul

$$0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- on peut multiplier un vecteur par un scalaire réel λ

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- tout vecteur x à un inverse $-x = -1 \cdot x$;

$$x - x = x + (-x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \\ \vdots \\ x_n - x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour voir la commutativité, on peut se placer dans $\mathbf{R}^2$ et se rappeler les manipulations vectorielles de lycée :

Exemple 3 — ***Les espaces de polynômes*** $\mathbf{R}[x]$ et $\mathbf{R}_n[x]$ sont des espaces vectoriels car toute somme de polynôme de degré inférieur ou égal à n est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 4 — ***Les espaces de suites et fonctions***

L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel. De la même façon, si E est un ensemble, alors l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbf{R}$ est aussi un espace vectoriel. A chaque fois, on a bien un neutre qui est la suite nulle ou la fonction nulle, est l'opposé de chaque élément est la fonction "$-f : x \mapsto -f(x)$."

Exemple 5 — ***Les espaces de matrices*** Soient $n, p > 0$ des entiers. Si on additionne des matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, la somme des dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. De plus, l'addition de matrices a un neutre, c'est la matrice nulle $0_{n,p}$. Toute matrice a bien un opposé pour l'addition car $-\mathrm{M} + \mathrm{M}$ est la matrice nulle.

2. SOUS-ESPACE VECTORIEL

Définition 2 | Sous-espace vectoriel

Un sous-espace vectoriel de E est un sous-ensemble inclus dans F qui est aussi un espace vectoriel.

Méthode *(Montrer que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ est un sous-espace vectoriel)*

Il suffit de
1. Montrer que F est non vide en prouvant que $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$.
2. Montrer que si $x, y \in \mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $x + \lambda y \in \mathrm{F}$. Cela peut se décomposer en deux tâches : montrer que $x + y \in \mathrm{F}$ et que $\lambda x \in \mathrm{F}$.

Remarque 2.1 — Quand un exercice demande de prouver qu'un ensemble est un espace-vectoriel, il suffit souvent de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace de référence.

Exemple 6 —

1. **Montrons que $\mathrm{F}\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, x+y-z-t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.**
   Bien évidement $\mathrm{F} \subset \mathbf{R}^4$. De plus, F est non vide car le neutre $(0,0,0,0)$ vérifie $0+0-0-0$. Maintenant soient $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v_2 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ des éléments de F et soit $\lambda \in \mathrm{R}$. Alors $v_1 + \lambda v_2 = (x_1 + \lambda x_2, y_1 \lambda y_2, z_1 \lambda z_2, t_1 \lambda t_2)$ vérifie
   $$\begin{aligned}(x_1 + \lambda x_2) + (y_1 \lambda y_2) - (z_1 \lambda z_2) - (t_1 \lambda t_2) &= (x_1 + y_1 - z_1 - t_1) + \lambda(x_1 + y_2 - z_2 - t_2) \\ &= 0 + \lambda \times 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$
2. **Montrons que l'ensemble des suites qui tendent vers 0 est un espace vectoriel.**
   Le plus simple est de montrer que c'est un sous-espace vectoriel des suites. L'ensemble en question est bien inclus dans l'espace vectoriel des suites réelles et la suite nulle y appartient car elle tend vers 0. Il nous suffit donc de montrer que si u et v sont des suites qui tendent vers 0 et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $u + \lambda v$ tend aussi vers zéro, ce qui est clair par limite de la somme. L'ensemble des suites qui tendent vers 0 et donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites, et donc c'est un espace vectoriel.
3. **Montrons que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel.**
   On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

- Il inclus dans $M_n(\mathbf{R})$ et bien non vide car la ${}^t 0_n = 0_n$.
- Si A et B sont symétriques et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors par linéarité de la transposée

$$ {}^t(A + \lambda B) = {}^t(A) + \lambda\, {}^t(B) = A + \lambda B, $$

donc $A + \lambda B$ est symétrique.

L'ensemble des matrices symétriques est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$, donc c'est un espace vectoriel.

3. FAMILLES DANS UN ESPACE VECTORIEL

3.1. Familles libres, génératrices

Définition 3 | Famille finie dans un espace vectoriel

Une famille finie dans un espace vectoriel est la donnée d'une liste finie de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E. On dit que la famille est de cardinal n.

Définition 4 | Combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel réel et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E. Une **combinaison linéaire** des vecteurs v_i est tout vecteur qui admet une expression

$$ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i $$

où les λ_i sont des scalaires réels.

Définition 5 | Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie

Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie dans un espace vectoriel E. Le sous espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$. On le note $Vect(\mathscr{F})$. Autrement dit

$$ Vect(\mathscr{F}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n\}. $$

Proposition 1

Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie dans un espace vectoriel E. Alors $Vect(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 3.1 — $Vect(v_1, \dots, v_n)$ est le plus petit espace vectoriel qui contient tous les vecteurs v_i, dans le sens où si G est un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout i, $v_i \in G$, alors forcément $Vect(v_1, \dots, v_n) \subset G$.

Définition 6 | Famille libre, génératrice

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille dans un espace vectoriel E. Elle est :

1. **génératrice** si $Vect(v_1, \dots, v_n) = \text{E}$. Autrement si tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs v_i.
2. **libre** si la seule façon d'obtenir le vecteur nul en faisait une combinaison linéaire des vecteurs x_i est de faire la combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\text{E}} \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0.$$

Exemple 7 — Les familles suivantes sont elles libres, génératrices dans $\mathbf{R}^3$?

1. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)$.
2. (v_1, v_2) avec $v_1 = (2,0,1)$ et $v_2 = (1,0,-1)$.
3. (v_1, v_2, v_3, v_4) avec $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ et $v_4 = (1,-2,3)$.
4. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (0,-1,1), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (1,0,-1)$.

Définition 7 | Base d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel, une famille qui est à la fois libre et génératrice s'appelle une **base** de l'espace vectoriel. Cela signifie que tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des v_i.

Attention

Une base d'un espace vectoriel n'est **jamais unique**. On n'écrira pas jamais **LA BASE** de E. Certaines bases sont plus intuitives que d'autres, on parle de **base canonique**.

3.2. Bases classiques

Vous devrez connaître un certain nombre de résultats sur les espaces vectoriels classiques, notamment certaines de leurs bases.

$\mathbf{R}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ La **base canonique** de $\mathbf{R}$ est

$$(e_1, \dots, e_n)$$

où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ où le 1 est placé en i-ème position.

De même, la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est $(e_1, \dots, e_n)$ où e_i est la matrice colonne avec des 0 partout sauf en i-ième ligne :

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrices. La **base canonique** de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est $(\mathrm{E}_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!])$ où $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1.

Il faut savoir aussi multiplier les matrices de cette base canonique.

Proposition 2

Soit $\mathrm{E}_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{E}_{k,\ell} \in \mathrm{M}_{p,m}(\mathbf{R})$, alors

$$\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_j^k \mathrm{E}_{i,\ell}$$

où

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Polynômes. La **base canonique** de $\mathbf{R}_n[x]$ est donnée par $(1, \dots, x^n)$. En effet tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[x]$ se décompose de façon unique comme

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k.$$

La base canonique de $\mathbf{R}[x]$ est la famille dénombrable (c'est à dire en bijection avec $\mathbf{N}$,

$$(x^k)_{k \in \mathbf{N}}.$$

C'est une base de cardinal infini, nous reparlerons des particularités de cas là durant le second semestre.

4. UTILISATION DES MATRICES