

TD 19 - Relations de comparaisons

Exercice 1 En identifiant quel terme est négligeable, donner des équivalents des suites suivantes en $+\infty$.

1. $u_n = n^3 + n!$, 2. $v_n = \ln(n^2) + \sqrt{n}$, 3. $w_n = \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}}$.

Exercice 2 Les équivalents suivants sont-ils vrais?

1. $\ln(10n) \sim \ln(n)$ 4. $e^{n+2} \sim e^n$
2. $\sqrt{n + \sqrt{n}} \sim \sqrt{n}$. 5. $n^2 \sim n^2 + n$
3. $\ln(n) \sim \ln(n+1)$ 6. $e^n \sim e^{n^2}$

Exercice 3 Déterminer les équivalents des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{n^2 \ln(n) + n^3}{n^4}$ 4. $x_n = \frac{\sin(n^\alpha e^{-2n})}{1 - \cos(n^\beta e^{-n})}$ avec $\alpha, \beta > 0$.
2. $v_n = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}$ 5. $y_n = \arctan((1 + 1/n)^3 - 1)$.
3. $w_n = \sin(\frac{1}{n^3 + n^2})$ 6. $z_n = \ln(n^5)(e^{n+5})$.

Exercice 4 Donner des équivalents de

$$S_n = \sum_{k=0}^n k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n k^2, \quad G_n = \sum_{k=0}^n q^k \text{ en fonction de } q \in \mathbf{R}.$$

Exercice 5 Soit (u_n) une suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

Après avoir montré que u_n tend vers 0, montrer que $u_{n+1} \sim u_n$.

Exercice 6 Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(2x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2) + x}{x\sqrt{x} + x^3}.$$

Exercice 7 En utilisant les sommes de Riemann, donner un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=0}^n k^\alpha$$

où $\alpha > 0$ est un réel fixé.

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{x^2+10}\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(x)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}xe^{-x\sqrt{x}}}{1+x^3}.$

Exercice 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, $0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$

2. En déduire que $\sum_{k=0}^n k! \sim n!.$

Exercice 10 Donner les équivalents suivants :

1. $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$,

2. $\sin\left(\pi + \frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$

3. $\log(\cos(\tan(e^{-1/x})))$ en 0^+

4. $\exp(\cos(x)) - 1$ en $\frac{\pi}{2}.$

Exercice 11 Soit $a > 0$. Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$u_n = \exp an \text{ et } v_n = n!.$$

On souhaite démontrer que $u_n = o(v_n).$

1. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \frac{v_{n+1}}{v_n}.$

2. En utilisant un produit télescopique, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

3. Conclure.