TD 2 - Raisonnements. Éléments de logique.

1. PROPOSITIONS LOGIQUES

Exercice 1 Écrire les affirmations suivantes avec des quantificateurs

1. Tout réel x admet un réel qui lui est au moins trois fois plus grand,
2. Il existe un unique entier premier qui est strictement plus petit que tous les autres nombres premiers,
3. E est une partie bornée de $\mathbf{N}$,
4. Quelque soit le réel y, l'équation $e^x = y+1$ d'inconnue x admet une unique solution.

Exercice 2 Traduire en français puis donner les négations des affirmations suivantes :

1. $\exists! x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$,
2. $\forall \mathrm{A} > 0, \exists! n \in \mathbf{N}, n \leqslant \mathrm{A} < n+1$,
3. $\forall x > 0, \exists \epsilon > 0, 0 < \epsilon < x$,
4. $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x) = f(y) \Rightarrow \exists z \in [x,y], f'(z) = 0$,

2. CONTRAPOSITION, ABSURDE

Exercice 3 Par l'absurde, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 4 Montrer les propositions suivantes :

1. Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $n^2 - 1$ est divisible par 8, alors n est impair.

3. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

Exercice 5 Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathrm{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 6 Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

Exercice 7 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

Exercice 8 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer u_n en fonction de n.

4. AUTRES RAISONNEMENTS

Exercice 11 Montrer les propositions suivants :

1. $\forall x > 0, \exists \epsilon > 0, 0 < \epsilon < x$,
2. $\forall A > 0, \exists! n \in \mathbf{N}, n \leqslant A < n+1$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbf{R}, x = \ln(z^2)$.

Exercice 12 Montrer que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \exists! x \in \mathbf{R}_+, y^2 - \sqrt{x} = 1.$$

Exercice 13

1. Déterminer toutes les fonctions réelles dérivables vérifiant
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$
2. Déterminer toutes les fonctions réelles vérifiant
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x+y) = f(x) + y.$$