Thomas Cometx

CHAPITRE 20

Séries numériques

Dans tout ce chapitre, (u_n) et (v_n) sont des suites réelles, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Série numérique

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle série de terme général u_n, que l'on note

$$\sum_{n>0} u_n \text{ ou } \sum u_n$$

la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Remarque 1.1 — La suite peut être définie à partir d'un certain rang n_0, comme dans le cas $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ où la suite est définie à partir de 2. On note alors

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_k.$$

Exemple 1 —

1. Pour (u_n) la suite constante égale à 1, la suite des sommes partielles est

$$S_n = n+1.$$

2. Pour $u_n = n$, la suite des sommes partielle vaut

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. La **série harmonique** est la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Les sommes partielles n'ont pas d'expression sympathique à calculer. Les premiers termes valent

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

Définition 2 | Série convergence

On dit qu'une série est **convergente** si la suite S_n des sommes partielles converge. On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim S_n.$$

Cette quantité s'appelle la **somme de la série.**
Si une série est convergente, on peut définir le **reste de la série**. C'est la suite définie par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 1.2 — Si la série converge, on a $\lim R_n = 0$. Il est intéressant de trouver un équivalent de R_n, pour savoir à quelle vitesse la série converge.

Théorème 1

Si la série $\sum u_n$ converge alors

$$\lim u_n = 0.$$

Par contraposée, si u_n ne converge pas vers zéro, la série des u_n diverge. On dit qu'elle **diverge grossièrement.**

Attention

Il faut faire attention à la nature des objets ! $\sum u_n$ est une suite alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est un nombre réel défini **uniquement** en cas de convergence de la suite.

Attention

On ne peut pas manipuler les sommes de séries **sans précaution** : sans avoir vérifié la convergence **des trois séries** on ne peut pas écrire des choses comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Par exemple, on verra que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, ainsi on ne peut pas écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Théorème 2 | Combinaison linéaire de séries convergentes

Si les séries de termes général (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors toute combinaison linéaire des suites (u_n) et (v_n) fournit une série convergente. C'est à dire que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, la série de terme général $u_n + \lambda v_n$ est convergente. De plus la somme est donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Proposition 1

Soit λ un réel non nul et (u_n) une suite. La série de terme général u_n converge si et seulement la série de terme général λu_n converge. Si on a convergence alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple 2 — ***Calculer la somme de la série de terme général*** $\frac{1}{2^n} + \frac{3}{4^n}$**..**

2. SÉRIES DE RÉFÉRENCE

2.1. Série géométrique (et dérivées)

Définition 3 | Série géométrique

La série géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ est la série $\sum_{n \geqslant 0} q^n$.

Théorème 3 | Convergence des séries géométriques

La série géométrique de raison q converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas là

$$\sum_{n \geqslant 0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve Si $q = 1$, la somme partielle vaut $n+1$. Il est clair que cela diverge.

Soit alors $q \neq 1$. Le calcul de la somme partielle est explicite et donne

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

qui converge si et seulement si q^n converge ce qui est le cas si et seulement si $|q| < 1$ et alors $q^n \to 0$. Ceci donne aussi la valeur de la somme.

Corollaire 1

La série $\sum_{n \geqslant n_0}^{+\infty} aq^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors

$$\sum_{n \geqslant n_0}^{+\infty} aq^n = \frac{aq^{n_0}}{1-q}.$$

Les séries géométriques dérivées sont aussi explicitement au programme.

Théorème 4

1. La série $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

2. La série $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

On verra souvent apparaître ces séries là sous la forme suivante. Il est important de savoir les retrouver.

Corollaire 2

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3}$

Exemple 3 — Calculer la somme de la série de terme général $u_n = (5n^2 + 3n + 1)3^{-n}$.

2.2. Série de Riemann

Définition 4 | Série de Riemann

Soit $\alpha > 0$. Une série de Riemann est un série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Remarque 2.1 — La série harmonique est la série de Riemann pour $\alpha = 1$.

Théorème 5 | Convergence des séries de Riemann

La série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 2.2 — La démonstration ne permet pas de donner une valeur pour la série. On en connaît quelques unes par d'autres moyens comme les valeurs pour α un entier pair. Par exemple

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.3. Série exponentielle

Définition 5

Soit $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est appelée série exponentielle.

Théorème 6 | Convergence des séries exponentielles

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$ la série de exponentielle associée à x converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Remarque 2.3 — Ce théorème sera démontré dans le chapitre **Formules de Taylor**.

Exemple 4 — ***Soit $\lambda > 0$, calculer la somme de la série de terme général $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.***

3. SÉRIES À TERMES POSITIFS, CONVERGENCE ABSOLUE

Proposition 2

Soit u_n une suite à termes positifs. On a l'alternative
1. la série $\sum u_n$ converge vers un réel positif
2. la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

Théorème 7 | Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Soient (u_n) et (v_n) des suites de réels positifs. Si (v_n) est une série convergente alors si $\forall n, u_n \leqslant v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Remarque 3.1 — Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors on garde la convergence de $\sum u_n$ mais on n'a plus forcément la comparaison des sommes.

Proposition 3

Soient deux séries à termes positifs telles qu'il existe $c > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang $u_n \geqslant c v_n$. Si la série de terme général v_n diverge vers $+\infty$, alors la série de terme général u_n aussi.

Théorème 8 | Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs

Soient (u_n) et (v_n) des suites de réels positifs. Si $u_n \sim v_n$ alors

$$\sum u_n \text{ converge } \iff \sum v_n \text{ converge} .$$

Attention

Ce théorème ne s'applique sur sur des séries à termes positifs. Par exemple les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$$

sont de nature différente !

C'est une grosse erreur qui sera lourdement pénalisée à chaque fois.

Petite remarque, on peut remplacer **série positive** par **positive à partir d'un certain rang.**

Définition 6 | Série absolument convergente

La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Théorème 9

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 3.2 — On remarque que toute série absolument convergente est la différence de deux séries de nombres réels convergente. En effet si u_n est une suite de nombres réels absolument convergente alors définissons pour tout n

$$v_n = \max(u_n, 0) \text{ et } w_n = -\min(u_n, 0).$$

En fait v_n vaut $|u_n| = u_n$ si $u_n \geqslant 0$, et 0 sinon; alors que $w_n = |u_n| = -u_n$ si $w_n \leqslant 0$, et 0 sinon.

Par construction, v_n et w_n sont suites de réels positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant |u_n| \text{ et } w_n \leqslant |u_n|.$$

Par critère de comparaison sur les séries positives, les séries de termes général v_n et w_n convergent. En présence uniquement de séries convergentes on peut alors calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n - w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

car

$$v_n - w_n = \max(u_n, 0) + \min(u_n, 0) = u_n.$$

Remarque 3.3 — Pour étudier certaines séries, on pourra commencer par chercher un équivalent de $|u_n|$ pour le comparer à une série connue :

- Si $|u_n|$ est équivalent à un terme d'une série convergence, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente
- Attention, on ne peut pas conclure si $|u_n|$ est équivalent au terme général d'une série divergente (sauf si u_n est toujours positif bien sûr). Par exemple, prenons $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On a $|u_n| = \frac{1}{n}$ mais la série est convergente.

Théorème 10 | Théorème de comparaison à une série à termes positifs

Soit (u_n) une suite réelle et (v_n) une suite à termes positifs. Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ est une série convergente alors $\sum u_n$ est une série convergente.

Remarque 3.4 — Théorème admis.

Corollaire 3 | Critère de Riemann pour les séries

Si $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$ avec $C \neq 0$. Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 5 — Étude de la série

$$\sum \frac{\sin(n^\alpha e^{-2n})}{1-\cos(n^\beta e^{-n})}.$$

Remarque 3.5 — En pratique, on utilisera **très souvent** le théorème de comparaison à une série positive avec $v_n = \frac{1}{n^2}$: si on arrive a montré que $n^2 u_n \to 0$, alors on aura prouvé la convergence de $\sum u_n$ (car $u_n = o(\frac{1}{n^2})$ qui est le terme général d'une série positive convergente).

Par exemple, si $u_n = n^{1000} e^{-n}$ alors $n^2 u_n = n^{1002} e^{-n}$ qui tend vers 0 par croissance comparée. Par comparaison avec $\frac{1}{n^2}$ on peut conclure que $\sum u_n$ converge.

Cela fonctionnerait avec tout $n^\alpha, \alpha > 1$.

Attention

Si $u_n = o(\frac{1}{n})$ on **ne peut pas conclure que $\sum u_n$ converge.** C'est une erreur classique et sévèrement sanctionnée. En effet ceci nous assure que la série des u_n est plus petite (en un certain sens) qu'une série divergente. Cela ne nous assure pas qu'elle converge, il faut qu'elle soit "assez plus petite". Par exemple

$$\sum \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge}$$

$$\text{mais } \sum \frac{1}{n\ln(n)^2} \text{ converge.}$$

4. RETOUR SUR LES SOMMES TÉLESCOPIQUES.

Dans cette partie on fait le lien entre convergence de séries et convergence de suites. Le lien se fait par télescopage : on retiendra que toute limite de suite est la somme d'une série convergente et réciproquement.

Théorème 11

La suite (u_n) converge si et seulement si la série

$$\sum u_{n+1} - u_n \text{ converge.}$$

Au quel cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim u_n - u_0.$$

Lorsqu'on rencontrera une série télescopique, on se ramènera toujours aux sommes partielles qui sont des "vraies sommes télescopique".

Exemple 6 — En se ramenant à une série télescopique, montrer que la série $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et donner sa somme.