

TD 20 - Séries numériques

Exercice 1 On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$.
2. En déduire une expression de la somme partielle de la série.
3. La série converge-t-elle?

Exercice 2 Soit $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 (-x)^{n-1} dx$.
2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \int_0^1 \frac{1 + (-x)^n}{1+x} dx.$$

3. Montrer que la série converge vers $\ln(2)$. On utilisera que $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

Exercice 3 On considère la série de terme général

$$u_n = \ln \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right).$$

A l'aide du calcul des sommes partielles par télescopage, déterminer la nature et éventuellement la somme de la série.

Exercice 4 Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{4}{3^n \ln(n)} \text{ converge.}$$

Exercice 5 Reconnaître les séries suivantes et calculer leurs sommes.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{3^{n+1}}{n!}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(-3)^n n!}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)(-1)^n}{2^{2n}}$.

Exercice 6 On souhaite prouver que la série harmonique diverge. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ sa somme partielle.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

2. En déduire que $\lim H_n = +\infty$.

Exercice 7

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(\frac{1}{n}) \geq \frac{2}{\pi n}$.
2. En déduire que la

$$\sum \sin(\frac{1}{n}) \text{ diverge.}$$

Exercice 8 Dans chacun des cas, la série de terme général u_n est-elle convergente?

1. $u_n = \frac{n^2 - 4^3}{-4n^4 + 12}$
2. $u_n = \frac{\ln(n)n}{4^n}$
3. $u_n = \frac{5}{2+n!}$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$
5. $u_n = (1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))(e^{\frac{1}{n}} - 1)$
6. $u_n = \cos(\frac{1}{n!})$
7. $u_n = \frac{\ln(5^n)}{n^2}$
8. $u_n = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2})$
9. $u_n = e^{-n} n^{1000}$.

Exercice 9 Les séries de terme général u_n sont-elles convergentes? On raisonnera sur les paramètres $\alpha, \beta > 0$.

1. $u_n = \sin(\frac{1}{n^\alpha})(1 - \cos(\frac{1}{n^{2\alpha}}))$
2. $u_n = \frac{\sin(n^\alpha e^{-n})}{\cos(n^\beta e^{-n})}(1 - \cos(n^\beta e^{-n}))$
3. $u_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}^\alpha}} \arctan(\frac{1}{n^\alpha})$
4. $u_n = \frac{\sin(n^\alpha e^{-n})}{(1 - \frac{1}{n^\beta})^5}$
5. $u_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}$
6. $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha$.

Exercice 10 On dit qu'une série de terme général est **alternée** si u_n change de signe à chaque fois. On suppose dans cet exercice que

- $|u_n|$ est décroissante
- $\lim u_n = 0$.

On note S_n la suite des sommes partielles.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Que peut-on conclure?
3. Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \sin(n\pi + \frac{1}{n}).$$

Exercice 11 Soit u_n la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et calculer la somme.
3. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

Exercice 12 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$u_{n+1} > \frac{\ell + 1}{2} u_n.$$

En déduire que la série diverge.

2. On suppose que $\ell < 1$. Montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$u_{n+1} < \frac{\ell + 1}{2} u_n.$$

En déduire que la série converge.

3. Si $\ell = 1$, trouver un exemple dans lequel la série diverge et dans lequel la série converge.