Thomas Cometx

CHAPITRE 24

Compléments sur les espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel.

Remarque 0.1 — Aucune démonstration n'est exigible dans ce chapitre.

1. SOMMES ET SOMMES DIRECTES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Définition 1 | Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme de F et G est l'espace vectoriel

$$\mathrm{F}+\mathrm{G}=\{x+y, x\in \mathrm{F}, y\in \mathrm{G}\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui s'écrivent comme la somme de d'éléments de E et de G.

Proposition 1

F + G est un espace-vectoriel. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E et F contenant F et G.

Exemple 1 — Dans $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, déterminer la somme F + G où

1. $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{G}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
2. $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{G}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

Exemple 2 — Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Déterminer

1. $F+\{0_E\}$,
2. $F+E$,
3. $F+F$.

Définition 2 | Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est directe si $F\cap G=\{0_E\}$. Dans ce cas là, on note la somme des deux espaces $F\oplus G$.

Proposition 2

La somme $F+G$ est directe si et seulement si tout vecteur de $F+G$ s'écrit **de façon unique** comme la somme d'une élément de F et d'un élément de G.

Exemple 3 —

1. Dans $\mathbf{R}^2$.
2. Dans $\mathbf{R}^3$.
3. Dans $M_n(\mathbf{R})$.
4. Dans $\mathbf{R}_n[x]$.

Définition 3 | Espaces vectoriels supplémentaires

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si E est la somme directe de F et de G :

$$E=F\oplus G.$$

Exemple 4 — Soit $E=\mathbf{R}^3, F=\mathrm{Vect}((1,-1,0)$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3, x-y+z=0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Exemple 5 — Dans $M_n(\mathbf{R})$, soit F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et G l'ensemble des matrices triangulaires inférieures. Montrer que $F+G=M_n(\mathbf{R})$ mais que la somme n'est pas directe. Trouver un supplémentaire de F.

Exemple 6 — Soit S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices carrées symétriques (resp. antisymétriques) de $M_n(\mathbf{R})$. On a la somme directe $M_n(\mathbf{R})=A_n\oplus S_n$.

2. CAS DE LA DIMENSION FINIE

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de F Alors F admet un supplémentaire dans E.

Attention

Le supplémentaire d'un espace vectoriel (de dimension strictement plus grande que 1) n'est **jamais unique**. On le voit dès la petite dimension $\mathbf{R}^2$: $\operatorname{Vect}((1,0))$ admet comme supplémentaire n'importe quelle espace de la forme

$$\operatorname{Vect}((\alpha,1))\text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3 | Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, alors

$$\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim F\cap G.$$

En particulier, si la somme est directe

$$\dim F+G = \dim F + \dim G.$$

Corollaire 1 | Dimension d'un supplémentaire

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G sont des supplémentaires dans E, alors

$$\dim E = \dim F + \dim G.$$

Remarque 2.1 — On peut donc facilement retrouver la dimension d'un supplémentaire G de F, c'est

$$\dim G = \dim E - \dim F.$$

Théorème 2 | Caractérisation des supplémentaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si deux des assertions suivantes sont vérifies :

1. $F\cap G = \{0_E\}$ (l'intersection des sous-espaces est triviale),
2. $\dim(F)+\dim(G) = \dim(E)$,
3. $E = F+G$ (tout vecteur de E se décompose comme la somme d'éléments de F et G.

alors

$$E = F \oplus G.$$

Remarque 2.2 — Dans ce cas là, la troisième assertion est automatiquement vérifiée.

Remarque 2.3 — On essaiera de se ramener le plus possible à l'utilisation des deux premières propriétés qui sont souvent les plus faciles à démontrer.

Méthode *(Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires)*

1. Première question à se poser : connaît-on les dimensions des espaces en question, ou peut-on les déterminer.
2. Si c'est le cas, on montre une des deux autres propriétés du théorème précédent. Selon la situation, une des deux sera plus facile à démontrer. C'est souvent la propriété de l'intersection, mais pas toujours, il faut faire attention à l'énoncé (et souvent à la question précédente).

Théorème 3

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Soient $(f_1, \dots, f_m)$ et $(g_1, \dots, g_n)$ deux des bases respectives de F et G. Si la concaténation des bases $(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$ est une famille libre alors c'est une base de $F + G$.
2. Si de plus E est de dimension finie et si la concaténation des bases $(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$ est une base de E, alors F et G sont supplémentaires dans E.

Définition 4

Si $E = F \oplus G$, alors la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E, appelée **base adaptée à la somme directe.**

Théorème 4 | Théorème de la base adaptée

Si E est un espace vectoriel de dimension finie qui s'écrit comme une somme directe de deux sous-espaces vectoriels $E = F \oplus G$. Alors il existe une base de E adaptée à la somme directe.

Exemple 7 — Après avoir démontré que les espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$, donner une base adaptée à la somme directe

$$\mathbf{R}^4 = \mathrm{Vect}\left((1,1,1,1)\right) \oplus \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x + y + z + t = 0\}.$$