TD 25 - Espaces probabilisés

Exercice 1 Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisable. Justifier que les ensembles

$$A = \bigcup_{p\in\mathbf{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n$$

et

$$A = \bigcap_{p\in\mathbf{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

sont des événements.

Exercice 2 Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{n\}) = 0.$$

Exercice 3 On réalise une suite infinie de lancers de pièce. On appelle A_n l'événement "obtenir Pile au lancer n.

1. Décrire avec une phrase les événements suivants.

$$B = \bigcap_{n=5}^{+\infty} A_n, \quad C = \bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n, \quad D = \bigcup_{k=n}^{2n} A_k$$

$$E = \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{2n} \cap \overline{A_{2n-1}}\right) \bigcup \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{2n-1} \cap \overline{A_{2n}}\right).$$

2. Écrire avec des unions et des intersections les événements suivants.
   a) On obtient au moins un pile après le n-ième lancer.
   b) On obtient au moins une fois deux Pile de suite.
   c) On n'obtient que des Pile à partir d'un certain rang.

Exercice 4 Dans chacun des cas, $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}), P)$ est-il un espace probabilisé ?

1. $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$
2. $P(\{n\}) = \frac{a}{2^n}$ pour $a > 0$ fixé.
3. $P(\{n\}) = \frac{ax^n}{n!}$ pour $a, x > 0$.
4. $P(\{n\}) = \frac{(-1)^n a}{n!}$.

Exercice 5 Un sportif tente des sauts d'obstacles de plus en plus difficiles. Il y a une suite de sauts d'obstacles. Le sportif a une probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir le l'obstacle n. Dès qu'il rate un obstacle, il s'arrête.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité de passer au moins n obstacles.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité de passer exactement n obstacles.
3. Montrer que l'événement "rater un obstacle" est presque-sûr. Qu'en déduit-on sur $X(\Omega)$ où X est la variable aléatoire qui compte les obstacles passés ?
4. **(Question concernant le chapitre suivant)**. X admet-elle une espérance ? La calculer.

Exercice 6 Une urne contient une boule Rouge. On lance une dès : si on obtient 6, on pioche dans l'urne, sinon on rajoute une boule Noire puis on relance le dès.

1. Montrer que l'expérience s'arrête presque sûrement.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée à un système complet d'événements bien choisi, exprimer la probabilité de tirer la boule rouge à l'aide d'une série.
3. Calculer la somme de la série. On utilisera sans démonstration que pour tout $x \in [0,1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

4. On suppose avoir tiré la boule Rouge. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'autres boules dans l'urne ?

Exercice 7 Un singe a une machine à écrire avec M touches. Il essaie de taper une copie du livre de votre choix (qui possède N caractères). Il tape au hasard sur son clavier. Une fois qu'il a tapé N caractères, on imprime son œuvre, puis il recommencent à taper.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait reproduit le livre en question après avoir tapé N caractères ?
2. Après n tentatives, quelle est la probabilité qu'il ait réussi à copier le livre au moins une fois ?
3. Si on lui laissait un temps infini, quelle la probabilité pour qu'il finisse par copier au moins une fois le livre ?

Exercice 8 **(Marche de l'ivrogne, simplifiée).** Un fêtard sort du bar, il veut rentrer chez lui. On représente son chemin comme une suite de trois lieux possibles : le bar, le milieu de la rue, chez lui.

- S'il est au bar, le bar est fermé car il est déjà très tard, il part vers le milieu de la rue.
- S'il est chez lui, il y reste et passe une bonne nuit.
- S'il est au milieu de la rue, il est perdu : avec une probabilité $1/2$ il retourne au bar, avec une probabilité $1/2$ il rentre chez lui.

1. Représenter le modèle avec un schéma.
2. On appelle A_n l'événement "le fêtard rentre chez lui après exactement n étapes. Que représente l'événement $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$? Justifier que l'union est disjointe.

3. Montrer que

$$P(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{2n}).$$

4. En déduire $P(E)$.

Exercice 9 (Modèle de reproduction, simplifié).

A la génération 0, on a une fleur. Celle-ci a une probabilité $p \in]0,1[$ de donner deux fleurs à la génération d'après, et une probabilité $1-p$ de ne pas avoir de descendants et de s'éteindre.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P(E_n)$ où E_n est l'événement "la lignée est éteinte à la génération n".

1. Calculer u_0, u_1, u_2.
2. Montrer que u_n converge.
3. Soit E l'événement "la lignée s'éteint. Montrer que $P(E) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
4. En utilisant un système complet d'événement lié à la première génération de fleurs, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n^2 + q$.
5. En déduire que $P(E) = \min\left(1, \frac{p}{q}\right)$.

Exercice 10 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un même espace probabilisé. On considère l'événement

$$A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\geqslant p} A_n \right).$$

1. Avec une phrase, expliquer ce qu'est l'événement A^*.
2. On suppose que la série des $P(A_n)$ converge. Montrer que $P(A^*) = 0$.
3. On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ diverge et que les A_n sont mutuellement indépendants. Montrer que $P(A^*) = 1$.
4. **(Application)**. On réalise une série de Pile ou Face infinis. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que la probabilité de réaliser une série de N Pile consécutifs est de 1.