CHAPITRE 26

Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ est un espace probabilisé.

1. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Définition 1 | Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète (réelle) est une fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que

1. $X(\Omega) = \{u_i, i \in I\}$ où I est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{N}$ (on dit que la variable aléatoire prend un nombre dénombrable de valeurs),
2. pour tout $i \in I$, $[X = u_i]$ est un événement de $\mathscr{A}$.

Exemple 1 — $X(\Omega)$ peut être par exemple :

1. un ensemble fini (comme au premier semestre),
2. $\mathbb{N}$,
3. l'ensemble des valeurs d'une suite quelconque.

Définition 2 | Loi d'une VA discrète

La loi d'une VA discrète X est la donnée des probabilités $P(X = x)$ pour $x \in \Omega$.

Définition 3 | Fonction d'un VA

Si g est une fonction définie sur $X(\Omega)$ alors $Y = g(X)$ est la variable aléatoire définie par $Y(\omega) = g(X(\omega))$.
On a $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et la loi de Y est donnée pour tout $y \in g(X)$ par

$$P(Y = y) \sum_{x \in X(\Omega), g(x) = y} P(X = x).$$

Définition 4 | VA discrète indépendantes

Des variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega), P(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = x_i]) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

Attention

Cette condition est plus forte que la condition "les variables sont indépendantes deux à deux" définie par : si $i \neq j$ alors pour tout $(x_i, x_j) \in X_i(\Omega)\times X_j(\Omega)$,

$$P([X_i = x_i] \cap [X_j = x_j]) = P(X_i = x_i) \times P(X_j = x_j).$$

Exemple 2 — Soient X, Y deux variables aléatoires de Rademacher indépendantes, alors X, Y et XY sont deux à deux indépendantes, mais pas mutuellement indépendantes.

Proposition 1

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors pour tout $(J_1,\dots,J_n)$ n-uplet de sous-ensembles respectifs de $X_1(\Omega),\dots,X_n(\Omega)$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \in J_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in J_i).$$

Exemple 3 — Si pour tout i, $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$, alors pour tout $m_1,\dots,m_n$ des entiers naturels,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leqslant m_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant m_i).$$

Ici, $J_i = \{0,\dots,m_i\}$.

2. ESPÉRANCE D'UNE VA DISCRÈTE

Contrairement au cas des variables aléatoires finies, l'existence de l'espérance n'est pas acquise ici.

Définition 5 | Espérance d'une VA discrète

On dit que X admet une espérance si la série

$$\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$$

est absolument convergente. On définit alors l'espérance de X par

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x \mathrm{P}(\mathrm{X} = x).$$

Remarque 2.1 —

1. Par la formule de transfert (voir plus loin), cela revient à dire que $|\mathrm{X}|$ admet un espérance l'absolue convergence de la série s'écrit

$$\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} |x| \mathrm{P}(\mathrm{X} = x) < +\infty.$$

2. L'absolue convergence assure ici que la somme peut se faire dans n'importe quel ordre donné sur les x (admis).

Théorème 1 | Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé qui admettent un espérance, et si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, alors $a\mathrm{X} + b\mathrm{Y}$ admet une espérance et

$$\mathrm{E}(a\mathrm{X} + b\mathrm{Y}) = a\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b\mathrm{E}(\mathrm{Y}).$$

Théorème 2 | Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé qui admettent un espérance, et si $\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}$,

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{E}(\mathrm{Y}).$$

Théorème 3 | Existence d'une espérance par domination

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé telles que :

- $|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{Y}$
- Y admet une espérance

alors X admet une espérance et $|\mathrm{E}(\mathrm{X})| \leqslant \mathrm{E}(\mathrm{Y})$.

Remarque 2.2 — Théorème admis.

Remarque 2.3 — On a aussi un inégalité triangulaire

$$|\mathrm{E}(\mathrm{X})| \leqslant \mathrm{E}(|\mathrm{X}|).$$

Théorème 4 | Théorème de transfert

Soit X une VA discrète et g une fonction sur $X(\Omega)$. Alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$$

est absolument convergente. Dès lors

$$E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x).$$

Remarque 2.4 —

1. L'absolue convergence assure que la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation.
2. Théorème admis.

3. VARIANCE, MOMENTS

Définition 6 | Moment d'une VA

X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si X^r admet une espérance. Le moment d'ordre r de X est alors $E(X^r)$.

Proposition 2

Si X admet un moment d'ordre r alors X admet un moment d'ordre k pour tout $k \in [0, r]$.

Définition 7 | Variance d'une VA discrète

Soit X une variable aléatoire qui admet une espérance, alors si $(X-E(X))^2$ une espérance on dit que X admet une variance. Celle-ci est définie par

$$V(X) = E[(X-E(X))^2].$$

Théorème 5 | Formules de Huygens-Koenig

Soit X une VA discrète, alors X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance (ou si X admet un moment d'ordre 2). Alors on a la formule de Huygens-Koenig :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Définition 8 | Écart-type

Si X admet une variance, alors on écart-type est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 3

Si X admet une variance alors $aX + b$ aussi (avec $a, b \in \mathbf{R}$) et

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Définition 9 | Variable centrée, réduite

Soit X une VA discrète, on dit que :
1. X est centrée si elle admet une espérance et que $E(X) = 0$,
2. X est réduite si elle admet une variance et que $V(X) = 1$.

Exemple 4 — Si X admet un moment d'ordre 2, alors $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

Proposition 4

Soit X une VA discrète

$$V \text{ admet une variance et } V(X) = 0 \iff X \text{ est constante.}$$

4. INTRODUCTION À LA FONCTION DE RÉPARTITION

Définition 10 | Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

La fonction de répartition vérifie quelques propriétés

Proposition 5 | Fonction de répartition de d'une VA discrète

Si F_X est la fonction de répartition d'une VA discrète X alors :
1. F_X est croissante
2. F_X est continue et constante par morceaux. Les points de discontinuités sont les points de $X(\Omega)$.
3. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Remarque 4.1 — La simulation de variables aléatoires en utilisant la fonction de répartition a été vue en TP.

Définition 11 | Fonction de répartition - version discrète

Pour une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, on utilisera souvent une **fonction de répartition discrète** définie par

$$F_X(n) = P(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).$$

Méthode *(Lien fonction de répartition discrète - probabilité)*

Dans certains cas, la fonction de répartition discrète sera plus facile à calculer que la probabilité elle même. On retiendra absolument le lien

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(X \leqslant n) - P(X \leqslant n-1) \\ &= F_X(n) - F_X(n-1). \end{aligned}$$

5. LOIS USUELLES

5.1. Retour sur la VA certaine

On rappelle que qu'une VA certaine X est définie par :

- $X(\Omega) = \{x_0\}$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $P(X = x_0) = 1$.

Ainsi sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < x_0 \\ 1 \text{ si } x \geqslant x_0. \end{cases}$$

5.2. Retour sur la VA de Bernoulli

On rappelle que qu'une VA de Bernoulli X est définie par :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
- $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

5.3. Loi géométrique

Définition 12 | Loi géométrique

On dit qu'une VA X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$.

Remarque 5.1 — La loi géométrique de paramètre 1 et une loi certaine (VA constante étale à 1). La loi géométrique de paramètre 0 n'a pas de sens et pas d'intérêt.

Remarque 5.2 — La loi géométrique est la loi du rang d'apparition du premier succès dans une épreuve de Bernoulli sans mémoire.

Notation

On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Proposition 6 | Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ pour $p \in [0,1]$, alors X admet une espérance et une variance. On a :
1. $E(X) = \frac{1}{p}$,
2. $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Proposition 7 | Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_X(n) = P(X \leqslant n) = 1 - (1-p)^n.$$

5.4. Loi de Poisson

Définition 13 | Loi de Poisson

On dit qu'une VA X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Remarque 5.3 — La loi de Poisson modélise le nombre d'événements qui se passent dans un intervalle de temps fixé, si on suppose que

- la fréquence d'arrivée de l'événement est connue
- les occurrences de ces événements sont indépendantes.

Par exemple, si en moyenne les clients d'un supermarché arrivent en caisse avec une fréquence de 1 minutes, le nombre de clients qui arrivent dans un intervalle de temps d'une heure (soit 60 minutes) sera modélisé par une loi de Poisson de paramètre 60.

Notation

On note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Proposition 8 | Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$, alors X admet une espérance et une variance. On a :
1. $E(X) = \lambda$,
2. $V(X) = \lambda$.