TD 26 - Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Quelle est la probabilité de l'événement "X prend une valeur impaire" ?

Exercice 2

1. Rappeler pourquoi les séries de termes général $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{1}{n^3}$ et $w_n = \frac{1}{n^4}$ sont convergentes. On note respectivement U, V et W leurs sommes.
2. Construire variables aléatoires X, Y, Z à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ pour lesquelles $P(\{X = n\})$, $P(\{Y = n\})$ et $P(\{Z = n\})$ est respectivement proportionnelle à u_n, v_n, w_n.
3. Ces variables aléatoires admettent-elles une espérance ? Une variance ?

Exercice 3 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes sur un même espace et N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{N}$. Montrer que Y définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{N(\omega)}$$

est une variable aléatoire discrète.

Exercice 4 On réalise l'expérience suivante : on lance un dès deux fois, et si le deuxième lancer est strictement supérieur au premier, on arrête de lancer. Sinon, on recommence. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{2n, n \in \mathbf{N}^*\}$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Montrer que X admet une espérance et une variance qu'on déterminera.
4. Montrer que $X = 2Y$ où Y suit une loi géométrique de paramètre à déterminer. Retrouver tous les résultats précédents.

Exercice 5 Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restants à ce moment dans l'urne, et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X. Quelle est son espérance ?

2. Exprimer Y en fonction de X et calculer E(Y).
3. Trouver un lien entre Z et X et en déduire la loi de Z.

Exercice 6 On lance une pièce une infinité de fois. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux lancers consécutifs identiques.

1. Montrer que X est une variable aléatoire discrète. (On montrera que presque sûrement, la réalisation de deux lancers consécutifs se produit).
2. Déterminer la loi de X.
3. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
4. Reconnaître la loi de $X-1$. Retrouver les résultats de la question précédente.

Exercice 7 Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des lois géométriques de paramètres $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$. Déterminer la probabilité que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ Y & 1 \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Exercice 8 Soit $c > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans **N** définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, P(X = n) = \frac{c^n}{(1+c)^{n+1}}.$$

1. Vérifier que X est une variable aléatoire.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 9 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p. Montrer que pour tout n, p dans $\mathbf{N}^*$,

$$P(X > n+p | X > n) = P(X > p).$$

Exercice 10 Soit X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \frac{1}{1+X}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 11 Soit X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la probabilité que X soit pair. On pourra exprimer $e^{\lambda} + e^{-\lambda}$ comme la somme d'une série convergente.

Exercice 12 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans **N**. Montrer que X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X > n)$ converge et qu'alors

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

Exercice 13 **(Edhec 2023.)** On effectue des lancers d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

Pour tout k de $\mathbf{N}$, on note F_k l'évènement obtenir "face" au k-ième lancer et on pose $P_k = \overline{F_k}$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de "face" obtenus avant le premier "pile".

1. a) Utiliser les évènements F_k et P_k pour déterminer la loi de X que l'on note désormais $BN(p)$.
   b) Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Selon le principe de la division euclidienne dans $\mathbf{N}$, on admet qu'il existe deux variables aléatoires Q et R définies sur le même espace probabilisé que X et telles que $X = 3Q + R$, avec $Q(\Omega) = \mathbf{N}$ et $R(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   Par exemple, si X prend la valeur 5, alors Q prend la valeur 1 et R prend la valeur 2.
   a) Écrire, pour tout entier naturel k, l'évènement $(Q = k)$ a l'aide de la variable X.
   b) En déduire que Q suit la loi $BN(1 - q^3)$.
3. Montrer que $P(R = 0) = \dfrac{1}{1 + q + q^2}$, $P(R = 1) = \dfrac{q}{1 + q + q^2}$ et $P(R = 2) = \dfrac{q^2}{1 + q + q^2}$.
4. Vérifier que les variables Q et R sont indépendantes.
5. Simulation des variables X, Q et R.
   a) Expliquer pourquoi la fonction suivante renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice.

```
def simulX(p):
    X=rd.geometric(p) - 1
    return X
```

   b) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie les valeurs prises respectivement par X, Q et R.

```
def div(p):
    X=simulX(p)
    Q = ------
    R = ------
    return (X,Q,R)
```

Exercice 14 Soit (X_n) une suite de variable aléatoires suivant chacune une loi binomiale $B(n, \frac{\lambda}{n})$. Soit Y une variable aléatoire qui suite une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\left(\prod_{i=0}^{n-1} 1 - \frac{i}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$,
$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = P(Y = k).$$

Exercice 15 **(Loi binomiale négative)** On considère une suite (B_n) d'épreuves de Bernoulli indépendantes d'un même paramètre $p \in]0,1[$. Soit X_n la variable aléatoire qui compte le rang du n-ième succès.

1. Reconnaître la loi de X_1.
2. Déterminer $X_n(\Omega)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in X_n(\Omega)$. Soit $C_{k-1,n-1}$ l'événement "obtenir au moins $k-1$ succès en n épreuves. Montrer que $P(S_n = k) = P(B_n) \times P(C_{k-1,n-1})$.
4. Montrer que
$$\forall k \geqslant n, P(X_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$
5. En déduire que
$$\forall x \in]0,1[, \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^n}.$$
6. Montrer que X_n admet une espérance que l'on calculera.