

# TD 27 - Applications linéaires

## 1. APPLICATIONS LINÉAIRES

**Exercice 1** Les applications linéaires suivantes sont-elles des endomorphismes de  $M_{2,1}(\mathbf{R})$  ?

1.  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$ .
2.  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y+2x \end{pmatrix}$ .
3.  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$ .
4.  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$ .
5.  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2** Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1.  $f : P \in \mathbf{R}[x] \mapsto XP(X) \in \mathbf{R}[x]$ ,

2.  $f : P \in \mathbf{R}[x] \mapsto P(X^2) \in \mathbf{R}[x]$ ,
3.  $f : M \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto A^t M \in M_n(\mathbf{R})$  où  $A \in M_n(\mathbf{R})$  est une matrice fixée.
4.  $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a+b \\ -c & d+2a+c \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  l'application de  $\mathbf{R}^3$  dans lui-même définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x).$$

1. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$ .
2. Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et de  $\text{Im } f$ .

**Exercice 4** Soit  $f$  l'application de  $M_{3,1}(\mathbf{R})$  définie par

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ z+y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $f \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}), \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ .
2. Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .
3.  $f$  est-elle injective, surjective, inversible ?

**Exercice 5** Soit  $S$  l'application de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  définie par

$$(S(u))_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme,
2. Déterminer l'image et le noyau de  $f$ ,
3.  $f$  est-elle injective, bijective, inversible. Si oui, quel est l'isomorphisme réciproque?

**Exercice 6** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que  $u : P \rightarrow P(x+1)$  est un automorphisme de  $\mathbf{R}_n[x]$ . Donner l'automorphisme inverse. Pour tout polynôme  $Q \in \mathbf{R}[x]$ , déterminer  $Q(u)$ .

**Exercice 7** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  tels que les images des vecteurs de la base canonique sont  $(1, 1, 1), (0, -2, 7), (7, 15, -21)$ .

1. Déterminer, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, f(x, y, z)$ .
2.  $f$  est-elle injective, surjective, bijective?

**Exercice 8 (Endomorphismes nilpotents)** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est nilpotent s'il existe  $k \in \mathbf{N}$  tel que  $f^k = 0$ .

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels  $\text{Ker} f^j$  est croissante pour l'inclusion.
2. Montrer que  $f^n = 0$ .

3. Dans cette question, on suppose que  $f^{n-2} \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $x \in E, (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .

**Exercice 9** Soit  $f$  une application linéaire sur  $\mathbf{R}^2$  définie par

$$f(x, y) = (2y - 3x, 4y - 6x).$$

Montrer que  $f$  est un projecteur dont on déterminera les espaces caractéristiques.

**Exercice 10** Soit  $f_A$  l'application de  $\mathbf{R}_n[x]$  dans  $\mathbf{R}_n[x]$  définie par  $u(P) = R$  où  $R$  est le reste de la division euclidienne de  $P$  par un polynôme  $A$  fixé.

1. Montrer que  $\text{Im} f_A = \mathbf{R}_d[x]$  où  $d = \deg A - 1$ .
2. Déterminer  $\text{Ker} f_A$ .
3. Montrer que  $f_A$  est un projecteur.

**Exercice 11** Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs sur  $E$  tels que  $p \circ q = q \circ p$ .

1. Montrer que  $p \circ q$  est un projecteur.
2. Montrer que  $\text{Im} p \circ q = \text{Im} p \cap \text{Im} q$ .
3. Montrer que  $\text{Ker} p \circ q = \text{Ker} p + \text{Ker} q$ .

## 2. UTILISATION DE LA DIMENSION FINIE

**Exercice 12** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ .

1. Montrer que si  $u$  est surjective alors  $m \leq n$ .
2. Montrer que si  $u$  est injective alors  $m \geq n$ .
3. Que dire si  $u$  est un isomorphisme?

**Exercice 13** Soit  $u \in \mathcal{L}(M_{3,1}(\mathbf{R}))$  définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 u \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base et la dimension de  $\text{Ker } u$ .
2. Donner le rang de  $u$ .
3. Donner une base de l'image de  $u$ .

**Exercice 14 (Adapté EM Lyon 2023)** Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux formes linéaires **non nulles** sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

1. Montrer  $\text{Ker } \phi \subset \text{Ker } \psi$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\lambda\phi = \psi$ .
2. Dans ce cas là, démontrer que les noyaux sont égaux. Quelle est leur dimension?

3. On se place dans le cas où on n'a pas d'inclusion entre les deux noyaux. Soit  $u$  l'application de  $E$  dans  $\mathbf{R}^2$  définie par

$$\forall x \in E, u(x) = (\phi(x), \psi(x)).$$

Montrer que  $u$  est linéaire.

4. Montrer que  $u$  est surjective.
5. Montrer que  $\text{Ker } u = \text{Ker } \phi \cap \text{Ker } \psi$ .
6. En déduire  $\dim \text{Ker } \phi \cap \text{Ker } \psi$ .

**Exercice 15** Soit  $u : \mathbf{R}_n[x] \rightarrow \mathbf{R}_n[x]$  définie par

$$u(P) = P(x) - xP'(x).$$

1. Déterminer  $\text{Ker } u$ .
2. Donner le rang de  $u$ .

**Exercice 16** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ .

1. Montrer que pour tout  $Y \in M_{1,n}(\mathbf{R})$ , l'application

$$\phi_Y : X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \mapsto YX$$

est un élément de  $E^* = \mathcal{L}(M_{n,1}(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ .

2. Si  $Y$  n'est pas le vecteur nul, montrer que  $\phi_Y$  est surjective.
3. Soit  $\phi$  l'application de  $M_{1,n}(\mathbf{R})$  dans  $E^*$  définie par  $\phi(Y) = \phi_Y$ . Montrer que  $\phi \in \mathcal{L}(M_{1,n}(\mathbf{R}), \mathcal{L}(M_{n,1}, \mathbf{R}))$ .
4. Montrer que  $\phi$  est injective. On calculera  $\phi_Y({}^t Y)$ .

5. En déduire que  $\phi$  est un isomorphisme.
6. Soit  $f \in E^*$ . Montrer qu'il existe  $Y \in M_{1,n}(\mathbf{R})$  tel que  $f = \phi_Y$ .

**Exercice 17** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Soit  $u$  définie sur  $E = \mathbf{R}_n[x]$  par

$$\forall P \in E, u(P) = P(x+1) - P(x).$$

1. Montrer que si  $u(P) = 0$ , alors  $P$  est constant et que si  $P$  admet une racine, alors il en admet une infinité.
2. En déduire  $\text{Ker } u$ .
3. En déduire  $\text{rg } u$ .
4. Montrer que  $\text{Im } u = \mathbf{R}_{n-1}[x]$ .