Thomas Cometx

CHAPITRE 28

Applications linéaires : interprétation matricielle.

Dans tout le chapitre, E, F, et G sont des espaces vectoriels **de dimension finie**.

1. INTRODUCTION : MATRICE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_m)$ une famille de vecteurs. On décompose chacun des vecteurs comme

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} e_j.$$

On construit alors la matrice $(m_{i,j})_\in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbf{R})$. On a la propriété suivante :

Proposition 1

Soient (C_i) $(i \in \{1, \dots m\}$ les vecteurs colonnes de M, c'est à dire que

$$\mathrm{C}_i = \begin{pmatrix} m_{1,i} \\ \vdots \\ m_{n,i}. \end{pmatrix}$$

On a :
1. $\mathscr{F}$ est une base si et seulement si les vecteurs C_i forment une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. C'est aussi équivalent à l'inversibilité de M.
2. $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si les vecteurs C_i forment une famille libre $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
3. $\mathscr{F}$ est génératrice si et seulement si les vecteurs C_i forment une famille génératrice de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Exemple 1 — Avec cette méthode. Montrer que la famille $(x^2+2x+1, x^2-2x+1, x+1)$ est une base de $\mathbf{R}_2[x]$

Remarque 1.1 — Nous reprendrons ce résultat après avoir étudié un peu plus le lien application linéaires - matrices.

2. MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1. Lien matrices / applications linéaires

Définition 1 | Matrice d'une application linéaire dans une base

Soient $B_E = (e_1, \dots, e_n)$ et $B_F(f_1, \dots, f_m)$ des bases respectives de E et F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. La matrice de f dans la base B_E vers la base B_F est la matrice $\mathrm{Mat}_{B_E, B_F} f \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], [\mathrm{Mat}_{B_E, B_F} f]_{i,j} = m_{i,j}$$

où $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$.

Attention

On retiendra que le nombre de lignez est la dimension de **l'espace d'arrivée**, et que le nombre de colonnes est la dimension de **l'espace de départ**.

Méthode *(Calculer une matrice)*

Pour calculer $[\mathrm{Mat} f]_{B_E, B_F}$.

1. Pour chaque vecteur e_i de la base B_E, on calcule $f(e_i)$.
2. On trouve la décomposition de $f(e_i)$ dans la base $B_F = (f_1, \dots, f_m)$ c'est à dire qu'on trouve des $(\lambda_{i,j})$ tels que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} f_i.$$

3. La matrice M est alors $M = (\lambda_{i,j})$.

Exemple 2 — Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (4x + 2y, x - y).$$

Déterminer la matrice de f si on a choisi la base canonique au départ et à l'arrivée.

Exemple 3 — La matrice de $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ où on a choisi la même base au départ et à l'arrivée est toujours I_n.

Exemple 4 — Trouver la matrice de l'application linéaire $f : \mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[x] \mapsto \mathrm{P}' \in \mathbf{R}_{n-1}[x]$.

Proposition 2 | Lien matrices - applications linéaires

Soient n et p des entiers strictement positifs et $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. Alors la matrice de $u : \mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \mapsto \mathrm{MX} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ écrite dans les bases canoniques est la matrice M.

Théorème 1

On suppose que $\dim \mathrm{E} = n$ et $\dim \mathrm{F} = p$

$$f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathrm{B_E},\mathrm{B_F}} f$$

est un isomorphisme linéaire entre $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathrm{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. En particulier :

1. $$\mathrm{Mat}_{\mathrm{B_E},\mathrm{B_F}} 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} = 0_{p,n}.$$

2. $$\mathrm{Mat}_{\mathrm{B_E},\mathrm{B_F}} f = \mathrm{Mat}_{\mathrm{B_E},\mathrm{B_F}} g \iff f = g.$$

3. $$\mathrm{Mat}_{\mathrm{B_E},\mathrm{B_F}} (f+\lambda g) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{B_E},\mathrm{B_F}} f + \lambda \mathrm{Mat}_{\mathrm{B_E},\mathrm{B_F}} g.$$

Cela implique aussi que

$$\dim \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \dim \mathrm{E} \times \dim \mathrm{F}.$$

2.2. Calcul à l'aide des matrices

Définition 2 | Noyau et image d'une matrice

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. On appelle :

1. **Le noyau de la matrice,** noté $\mathrm{Ker}\,\mathrm{M}$, l'espace vectoriel défini par

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{M} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbf{R}), \mathrm{MX} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\}.$$

2. **L'image de la matrice,** noté $\operatorname{Im} M$, l'espace vectoriel défini par

$$\operatorname{Im} M = \{MX, X \in M_{p,1}(\mathbf{R}) = \{Y \in M_{n,1}(\mathbf{R}), \exists X \in M_{p,1}(\mathbf{R}), MX = Y.$$

Méthode *(Calcul du noyau et de l'image à l'aide de bases)*

Pour déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire f à l'aide d'une base : on écrit la matrice associée à l'aide des bases (c'est à dire $[\mathrm{Matf}]_{B_E,B_F}$), on déterminer son noyau dans l'espace de matrices colonnes associées, puis on retraduit dans les espaces.

Exemple 5 —

Proposition 3 | Matrice d'une forme linéaire

Soit f une forme linéaire sur un espace vectoriel dont une base est $B = (e_1, \dots, e_n)$, la matrice de la forme linéaire f est le vecteur ligne

$$\mathrm{Mat} f]_B = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1 — Cela sous entend qu'on a pris (1) comme base dans l'espace d'arrivée qui est $\mathbf{R}$.

Exemple 6 —

Méthode *(Calcul de l'image d'un vecteur à l'aide d'une matrice)*

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $x \in E$. Pour déterminer $f(x)$ on peut :
1. Déterminer $[\mathrm{Mat} f]_{B_E,B_F}$.
2. Écrire x dans la base B_E. On le note $X = \mathrm{Mat}_{B_E}\, x$.
3. On calcule MX : il vaut $\mathrm{Mat}_{B_F} f(x)$.
4. On obtient $f(x) = \sum_{i=1}^{m} [MX]_i f_i$.

2.3. Changement de bases

Soient B et B' deux bases d'un même espace vectoriel de dimension finie E. On se souvient qu'elles sont nécessairement de même cardinal $n = \dim E$. Mais comment passer d'une base à l'autre.

Définition 3 | Matrice de changement de base

On appelle la matrice de la base $B = (e_1, \dots, e_n)$ dans dans la base $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ où la matrice de changement de base B vers B′ la matrice $P_{B,B'} \in M_n(\mathbf{R})$ dont la colonne de rang i contient la matrice colonne qui représente les coordonnées de e_i dans la base B′. C'est à dire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} P_{j,i} e'_j$$

où P est la matrice de passage de la base B dans la base B′.

Proposition 4

Une matrice de passage est inversible et $(P_{B,B'})^{-1} = P_{B',B}$.

Proposition 5 | Changement de coordonnées

Soit $x \in E$, si X_B est le vecteur des coordonnées de x dans la base B, alors $P_{B,B'}$ est le vecteur des coordonnées de x dans la base B′.

2.4. Opérations sur les matrices

Théorème 2 | Lien avec la composition

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors B_E, B_F et B_G sont des bases respectives de E, F et G on a

$$[\mathrm{Mat}]_{B_E, B_G} v \circ u = ([\mathrm{Mat}]_{B_G, B_G} v \circ u) \times ([\mathrm{Mat}]_{B_E, B_F} u).$$

Corollaire 1

Un endomorphisme en dimension finie est un projecteur si est seulement si il est représenté par une matrice A vérifiant $A^2 = A$ et ce dans n'importe quel base.

Corollaire 2

Une application linéaire est inversible si et seulement si elle est représentée par une matrice inversible (et ce dans n'importe quelle base).

Remarque 2.2 — La majorité des propriétés des applications linéaires correspondent à des propriétés matricielles. On peut encore citer :

1. la nilpotence revient à être représenté par une matrice A telle qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $A^m = 0_n$...
2. le fait d'être une homothétie revient à être représenté par une matrice λI_n dans n'importe quelle base

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et B_E, B'_E deux bases de E, ainsi que B_F, B'_F deux bases de F, alors

$$[\mathrm{Mat}_{B_E,B_F} f] = P_{B_E,B'_E}[\mathrm{Mat}_{B'_E,B'_F} f]P_{B'_F,B_F}.$$

2.5. Rang d'une matrice

Définition 4 | Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est la dimension de $\mathrm{Im} f$. Avec l'étude précédente, on sait aussi que c'est le nombres de lignes non nulles de la matrice obtenus en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice.

Théorème 4

Soit f une application linéaire de E dans F et M la matrice de f dans des bases données. Alors $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} E$.

Méthode *(Déterminer le rang d'une application linéaire à l'aide des matrices)*

1. On écrit la matrice de l'application linéaire dans certaines bases.
2. On utilise le pivot de Gauss pour déterminer le rang.

Proposition 6 | Composition par un isomorphisme - matrice inversible

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ des applications linéaires.

1. Si u est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}\, v \circ u = \mathrm{rg}\, u$.
2. Si v est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}\, v \circ u = \mathrm{rg}\, v$..

Ainsi, soient A et B deux matrices telles que AB existe.

1. Si A est inversible alors $\mathrm{rg} AB = \mathrm{rg} B$.
2. Si B est inversible alors $\mathrm{rg} AB = \mathrm{rg} A$.

3. LE CAS DES ENDOMORPHISMES ET MATRICES CARRÉES

Notation

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base B se note $\mathrm{Mat}_B f$.

Définition 5

Soient M, N des matrices dans $\mathrm{M}_n\mathbf{R}$, on dit qu'elles sont **semblables** s'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ inversible telle que $\mathrm{M} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{NP}$.

Théorème 5

Deux matrices sont semblables si et seulement si elle représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Auquel cas on a, avec les notations précédentes, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$ (si M représente f dans la base B et N dans la base B$'$.

Remarque 3.1 — On déduit de tout ce qui précède que deux matrices semblables ont le même rang.

Cette analogie endomorphisme - matrices carrées, ainsi que tout le travail qui précède permet d'écrire la formule du binôme de Newton.

Théorème 6

[Formule du binôme de Newton pour les matrices] Si A et B sont deux matrices qui **commutent**, alors pour tout $n \in \mathrm{N}$,

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k}.$$

Exemple 7 — Calculer $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

Le résultat suivant a aussi déjà été évoqué dans un cadre plus général.

Théorème 7

Soit f une endomorphisme de E un espace de dimension finie. On a l'équivalence

1. f est un automorphisme,
2. f est représenté par une matrice inversible dans une base donnée,
3. f est représenté par une matrice inversible dans tout base.

Remarque 3.2 — On se servira surtout du sens (1) vers (2).

Exemple 8 — Montrer que $u : \mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[x] \mapsto \mathrm{P}(x+1)$ est inversible. Déterminer l'inverse de la matrice de u dans la base canonique.

On revient, pour conclure, sur une dernière partie déjà évoquée.

Définition 6 | Polynôme annulateur de matrice

On dit qu'un polynôme P annule une matrice carrée A si et seulement si $P(A) = 0$.

Avec tout ce qui a été dit précédemment, il est clair que P annule A si et seulement si P annule tout endomorphisme représenté par cette matrice dans une certaine base. De même, si P annule un endomorphisme, il annulera toute matrice qui le représente.

Cette analogie servira dans les exercices à

1. Calculer des inverses de matrices, des isomorphismes réciproques (cela peut marcher dans les deux sens),
2. Calculer des puissances d'endomorphismes et de matrices par division euclidienne notamment.