

TD 28 - Applications linéaires et matrices

1.

RETOUR SUR LE CHAPITRE 27, APPLICATIONS DE LA DIMENSION FINIE

Exercice 1 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$;
2. $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$;
3. $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$;
4. $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

Exercice 2 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P'(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_n)).$$

Montrer que φ est bijective.

2.

MATRICES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 3 Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0) \quad \text{et} \quad f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

Exprimer $f(x, y, z)$ et déterminer noyau et image de f . Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?

Exercice 4 Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques au départ et à l'arrivée dans les cas suivants.

1. $u : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$.

2. $v : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mapsto (x + y + z + t, x + y + z, x + y, z) \in \mathbf{R}^4$.
3. $w : P \in \mathbf{R}_3[x] \mapsto (P(0), P'(0), P''(0)) \in \mathbf{R}^3$.
4. $f : (x, y, z) \in \mathbf{R}_3 \mapsto \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z + y \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{R})$.
5. $g : M \in M_2(\mathbf{R}) \mapsto {}^t M + M \in M_2(\mathbf{R})$.
6. $h : P \in \mathbf{R}_4[x] \mapsto P' - P(0)x^4 + P \in \mathbf{R}_4[x]$.

Exercice 5

1. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$
2. Montrer que $f : P \in \mathbf{R}_2[x] \mapsto 2(X + 1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[x]$
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 6 Soit u définie sur $\mathbf{R}_4[x]$ par $u(P) = P(x + 1)$.

1. Prouver que u est linéaire.
2. Prouver que u est inversible.
3. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
4. Quelle est l'inverse de la matrice obtenue?

Exercice 7 Déterminer la matrice de l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$u(x, y, z) = (x - y + z, x + y - 2z, z - x - y)$$

dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. En déduire une expression de u^3 .

Exercice 8 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f est nilpotent d'ordre n . Cela signifie que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ mais que $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
2. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la matrice de f^k .
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, donner la matrice de $(\lambda I_n + f)^k$.

Exercice 9 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3 et muni d'une base (e_1, e_2, e_3) défini par

$$f(e_1) = \frac{1}{2}(e_2 + e_3), f(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2), f(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2).$$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base (e_1, e_2, e_3) .
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et donner son inverse.
3. Justifier que $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans une base de E à déterminer.
4. Montrer que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
6. Déterminer $\lim (P^{-1}MP)^n$.
7. En déduire $\lim M^n$.
8. Soit $x \in E$, déterminer $\lim f^n(x)$.

3. AUTOUR DU RANG

Exercice 10 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 12 & 18 \\ 12 & 15 & 18 & 28 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

1. Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbf{R}$, le rang de la matrice $A - \lambda I_3$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Montrer que $B' = (e_1 - e_3, e_2, e_1 - 2e_2 + e_3)$ est une base de E .
3. Soit u un endomorphisme représenté par A dans la base B . Déterminer la matrice de u dans la base B' .
4. En déduire la matrice de u^n dans la base B' .

5. En déduire la matrice de u^n dans la base B.

On rappelle que si P est la matrice de changement de base de B dans B' et que si A représente u dans la base B, alors $P^{-1}AP$ représente u dans B'.

4. POLYNÔMES ANNULATEURS

Exercice 12 Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux matrices X et Y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $M = X^t Y$.
2. En déduire que $M^2 = \text{Tr}(M)M$.
3. En déduire une formule pour M^n .

Exercice 13

1. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \text{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
 - a) Déterminer $(f - \text{Id})^2 + f \circ (2\text{Id} - f)$.
 - b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (f - \text{Id})^2(x) + (f \circ (2\text{Id} - f))(x)$.
 - c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
2. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f \circ (f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) = 0$$

- a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant :

$$\frac{1}{4}(X - 1)(X - 4) + XP(X) = 1$$

- b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
3. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f , dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
 - a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1X + \dots + a_pX^p$.
 - b) En déduire que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
 - c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes?

5. EXERCICE EM LYON

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E . On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP'.$$

1.
 - a) Montrer que φ est une application linéaire.
 - b) Calculer $\varphi(X^n)$.
 - c) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3.
 - a) L'endomorphisme φ est-il injectif? Justifier votre réponse.
 - b) Soit P un polynôme non nul de $\ker(\varphi)$. Montrer que P admet 1 comme unique racine et que P est de degré n .
 - c) En déduire une base de $\ker(\varphi)$.