Thomas Cometx

CHAPITRE 30

Fonctions convexes et optimisation

Dans tout le chapitre f est une fonction réelle définie sur un intervalle I.

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Fonction convexe

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **convexe** si pour tout $(t_1, t_2)^2 \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, et pour tout $(x, y) \in \mathrm{I}^2$,

$$f(t_1 x + t_2 y) \leqslant t_1 f(x) + t_2 f(y),$$

ou de manière équivalente si elle vérifie

$$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Définition 2 | Fonction convexe

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **concave** si pour tout $(t_1, t_2)^2 \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, et pour tout $(x, y) \in \mathrm{I}^2$,

$$f(t_1 x + t_2 y) \geqslant t_1 f(x) + t_2 f(y),$$

ou de manière équivalente si elle vérifie

$$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Remarque 1.1 — f est convexe si et seulement si $-f$ est concave, et réciproquement.

Exemple 1 —

Proposition 1 | Interprétation géométrique

Une fonction f est convexe si et seulement si son graphe et situé sous toutes ses cordes. (Une corde est un segment reliant deux point du graphe).

Proposition 2 | Généralisation de l'inégalité de convexité

Soient
- f une fonction convexe sur I,
- $n \in \mathbb{N}^*$,
- $(t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$,
- $(x_1, \dots x_n) \in \mathrm{I}^n$

alors

$$f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Pour une fonction concave l'inégalité obtenue sera

$$f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \geqslant \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Exemple 2 — On admet dans cet exemple que ln est concave sur $]0, +\infty[$. Ainsi en prenant $t_1 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$ et des réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$. On obtient

$$\ln(\sum_{i}^n \frac{x_i}{n}) \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_i),$$

donc

$$\ln(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i) \geqslant \ln\left(\prod_{i=1}^n (x_i)^{\frac{1}{n}}\right),$$

puis par croissance de l'exponentielle en l'appliquant des deux côtes de l'égalité :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2. FONCTIONS CONVEXES ET RÉGULARITÉ

On n'étudiera jamais la convexité de fonctions C^1 et non C^2, cependant le critère suivant doit être connu.

Proposition 3 | Fonctions de classe C^1 et convexité

Une fonction de classe C^1 est
1. convexe si f' est croissante,
2. concave si f' est décroissante.

Corollaire 1

1. f est convexe si et seulement si (C_f) est au-dessus de ses tangentes,
2. f est concave si et seulement si (C_f) est au-dessous de ses tangentes.

Le critère suivant sera largement utilisé dans les exercices :

Théorème 1 | Fonctions de classe C^2 et convexité

Une fonction de classe C^2 est
1. convexe si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$,
2. concave si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

Proposition 4

1. exp est convexe sur $\mathbf{R}$,
2. ln est concave sur $]0, +\infty[$,
3. un trinôme du second degré est soit convexe soit concave selon le signe de son coefficient dominant.

3. APPLICATIONS DE LA CONVEXITÉ

3.1. Inégalités de convexité

Dans cette partie, à travers l'étude d'exemples on verra comment la convexité nous permet d'obtenir des inégalités utiles.

Avec l'exponentielle. La fonction exponentielle est convexe. Sa courbe représentative est donc au dessus de ses tangentes. Calculons l'équation de la tangente en 0. L'équation de la tangente est

$$y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0) = x + 1.$$

La courbe de la fonction est au dessus de la tangente ce qui donne

$$\exp(x) \geqslant 1 + x.$$

Avec la fonction sinus. La fonction sin a pour dérivée seconde $-\sin$ qui est négative sur $[0, \pi]$. Sur cette intervalle là la fonction est concave. Sa courbe représentative est donc

- au dessous de ses tangentes,
- au dessus de ses cordes.

La tangente en 0 admet pour équation

$$y = \sin'(0)(x-0) + \sin(0) = x.$$

Ainsi,

$$\forall x \in [0, \pi], \sin(x) \leqslant x.$$

Cherchons l'équation de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$: il s'agit de trouver a et b tels que

$$\begin{cases} \sin(0) = a \times 0 + b \\ \sin(\frac{\pi}{2}) = a \times \frac{\pi}{2} + b. \end{cases}$$

On obtient $b = 0$ et $a\frac{2}{pi}$. L'équation est donc $y = \frac{2}{\pi}x$ et comme la courbe de sin est au dessus de la corde sur $[0, \pi]$ on obtient

$$\forall x \in [0, \pi] \sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

On a donc obtenu

$$\forall x \in [0, \pi] x \geqslant \sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

3.2. Optimisation convexe

L'étude des fonctions convexes a de nombreuses applications, notamment en économie, pour résoudre des problèmes de minimisation de couts, de maximisation de bénéfice. Plusieurs théorèmes existent et il y en a un en particulier que nous devons connaître.

Théorème 2

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert, alors tout minimum local de f est un minimum global.
Pour une fonction concave, tout maximum local est un maximum global.

Corollaire 2

Soit f une fonction **convexe** de classe C^1 sur un intervalle ouvert I et $x \in I$ tel que $f'(x) = 0$, alors f admet un **minimum global** en x.
Pour une fonction **concave**, on a un résultat analogue si ce n'est qu'on obtient un **maximum global**

4. RETOUR SUR LES ÉTUDES DE FONCTIONS

Aux études de fonctions faites jusqu'ici, on peut rajouter l'étude de leur convexité (c'est à dire déterminer si la fonction est convexe, concave, ou aucun des deux). Cela permet de placer finement les tangentes remarquables qu'on vous demandera de tracer : si la fonction est convexe, il faudra bien que la courbe soit au dessus de la tangente! (et en dessous pour les fonctions concaves.

On s'intéressera aussi à déterminer les points d'inflexion.

Définition 3 | Point d'inflexion

Soit f une fonction C^2 définie sur un intervalle I, et soit $x \in I$. On dit que la courbe admet un point d'inflexion en x (ou d'abscisse x) si la courbe change de concavité en x. C'est à dire que
- $f''(x) = 0$,
- f'' est de signe différent à gauche et à droite de x.

Dans ce cas là, la tangente en x a un comportement remarquable : elle coupe la courbe représentative de la fonction et n'a pas la même position relative à elle de part et d'autre du point. (Par exemple si elle est au dessus de la courbe à droite, alors à gauche elle sera en dessous.