

TD 29-30 - Fonctions convexes

Exercice 1 Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont concaves, convexes. Déterminer les éventuels points d'inflexions.

- | | | |
|--------------------------------|---|-------------------------|
| 1. \arctan | 4. \tan | 7. $x \mapsto e^{x^2}$ |
| 2. $x \mapsto e^x + e^{-x}$ | 5. \cos | 8. $x \mapsto x $ |
| 3. $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ | 6. $x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)$ | 9. $x \mapsto \sqrt{x}$ |

Exercice 2 Montrer que pour tout $(x, y) \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 3 Soit f une fonction polynomiale de degré trois. Montrer que f admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

Exercice 4 Soit f une fonction convexe strictement croissante sur \mathbf{R} .

1. Montrer que pour tout $x > 1$ on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq f(1) - f(0).$$

2. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 5

1. Montrer que $x \mapsto x \ln(x)$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* .
2. Montrer que pour tout x, y, a, b strictement positifs,

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

Exercice 6

1. Étudier la convexité de $f : x \in \mathbf{R} \mapsto \ln(1 + e^x)$.
2. Soit $x, y \in \mathbf{R}_+$ et $\lambda \in [0, 1]$, montrer que

$$1 + x^\lambda y^{1-\lambda} \leq (1 + x)^\lambda (1 + y)^{1-\lambda}.$$

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire réelle finie et ϕ une fonction convexe sur un intervalle I tel que $X(\Omega) \subset I$. Montrer que $\phi(E(X)) \leq E(\phi(X))$.

Exercice 8 Soit ϕ une fonction convexe sur \mathbf{R} et f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\phi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right).$$

2. En déduire que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t)) dt.$$

Exercice 9 En utilisant une inégalité de convexité, montrer que pour tout réels strictement positifs x_1, \dots, x_n ,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

On pourra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique vue en exemple.

Exercice 10 Soit $f \in C^1(I)$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I . Soit $x_0 \in I$ un point critique de I . Montrer que f admet un minimum global en x_0 .