Thomas Cometx

CHAPITRE 31

Couples de variables aléatoires réelles discrètes

1. COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES - LOI

Définition 1 | Loi d'un couple de variables aléatoires

Si X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω alors le couple (X, Y) est une variable aléatoire sur Ω avec

$$(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x, y), x \in X(\Omega), Y \in Y(\Omega)\}.$$

La loi du couple (X, Y) est la donnée des valeurs

$$P((X, Y) = (x, y)) = P([X = x] \cap [Y = y])$$

pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Proposition 1 | Retour sur l'indépendance

Deux variables aléatoires discrètes sont indépendante si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Remarque 1.1 — Si X et Y sont indépendantes, alors la donnée de leurs lois permet de trouver la loi du couple (X, Y). Si elles ne sont pas indépendantes, on ne peut pas la trouver sans plus d'information.

Dans l'autre sens, c'est facile, si on connait la loi du couple (X, Y) on peut trouver la loi de X et la loi de Y (grâce à la formule des probabilités totales).

Proposition 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes, alors la loi de X est donnée

par

$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap P[Y = y]).$$

Exemple 1 — Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires dont la loi est donnée par

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, P([X = n] \cap [Y = m]) = \frac{1}{2^{n+m+2}}.$$

1. Vérifier que c'est bien un couple de variable aléatoires.
2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.

2. THÉORÈMES DE STABILITÉ

Théorème 1 | Stabilité des lois binomiales

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des lois binomiales $\mathscr{B}(n_1, p)$ et $\mathscr{B}(n_2, p)$. Alors $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

Corollaire 1

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des VA indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n_k, p). Alors $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi de Poisson de paramètres $(\sum_{k=1}^{n} n_k, p)$.

Exemple 2 — Un étudiant passe un concours composé de deux QCM de respectivement 5 et 10 questions. A chaque question il a une probabilité 0.7 de répondre juste. Justifier que cela revient à passer un seul QCM de 15 questions avec la même probabilité 0.7 de réussite à chaque question.

Remarque 2.1 — Cela ne fonctionne pas si les paramètres p sont différentes pour X_1 et X_2 : on n'obtient même pas de loi binomiale. Par exemple si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(10, 1)$ et $x_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(10, 0.5)$, on remarque que $(X_1 + X_2)(\Omega) = [\![10, 20]\!]$. On ne peut pas obtenir une loi binomiale! Même dans le cas où on obtiendrait l'intervalle entier, on n'obtiendrait pas une binomiale.

Théorème 2 | Stabilité des lois de Poisson

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Corollaire 2

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des VA indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

3. FONCTION D'UN COUPLE DE VA

3.1. Loi de $g(X,Y)$, exemples fondamentaux

Dans cette partie, on s'intéresse à déterminer la loi de $g(X,Y)$ où g est une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On retiendra, dans le cas que de variables aléatoires discrètes :

1. On se demande toujours quel est l'ensemble de valeurs prises par g, c'est à dire $g(X,Y)(\Omega)$.
2. Ensuite, pour tout $x \in (X,Y)(\Omega)$, on cherchera à déterminer $P((X,Y)=x)$.

Remarque 3.1 — Sauf cas particuliers avec des résultats du cours, il sera complètement vain d'essayer de calcule directement la probabilité.

Remarque 3.2 — Quand on demande de déterminer la loi de $g(X,Y)$, il faudra parfois reconnaître une loi usuelle, mais aussi parfois seulement déterminer l'ensemble des valeurs prises et leurs probabilités.

Les trois exemples à venir sont à connaître.

Méthode *(Loi de $\max(X,Y)$)*

Pour déterminer la loi de $\max(X,Y)$ quand X et Y (et disons à valeur dans $\mathbb{N}$), on **passe par la fonction de répartition**.

1. On remarque que

$$P(\max(X,Y) \leqslant n) = P([X \leqslant n] \cap [Y \leqslant n]).$$

On calcule alors cette probabilité. C'est encore plus simple si X et Y sont indépendantes car alors la probabilité vaut

$$P(X \leqslant n) \times P(Y \leqslant n).$$

2. Une fois cette probabilité calculée, on obtient $P(\max(X,Y)=n)$ grâce à l'opération

$$P(\max(X,Y)=n)=P(\max(X,Y)\leqslant n)-P(\max(X,Y)\leqslant n-1).$$

Exemple 3 — Soient X, Y deux variables aléatoires géométriques indépendantes de paramètre $p\in[0,1]$. Déterminer la loi de $\max(X,Y)$.

Exemple 4 — Même question mais avec $Y=X+1$ (X et Y sont elles indépendantes ?).

Remarque 3.3 — La même méthode fonctionne avec un nombre quelconque de variable aléatoires indépendantes.

Exemple 5 — Soient (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[\![0,M]\!]$ où $M\in\mathbb{N}$. Déterminer la loi de

$$Z_n=\max(X_1,\dots X_n).$$

Pour tout $k\in[\![0,M]\!]$, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}P(Z_n)=k.$$

Méthode ***(Loi de*** $\min(X,Y)$***)***

Pour le calcul de la loi du minimum, le raisonnement est analogue à celui du max pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$P(\min(X,Y)\geqslant n)=P([X\geqslant n]\cap[Y\geqslant n]).$$

Ce qui permet ce calculer

$$P(\min(X,Y)=n)=P(\min(X,Y)\geqslant n+1)-P(\min(X,Y)\geqslant n).$$

Remarque 3.4 — Si on souhaite calculer la fonction de répartition du minimum quand X et Y sont indépendantes, pour utiliser l'égalité

$$P(Z=n)=F_Z(n)-F_Z(n-1),$$

on s'y prend ainsi :

$$\begin{aligned}
F_{\min(X,Y)}(n) &= P(\min(X,Y) \leqslant n) \\
&= 1 - P(\min(X,Y) > n) \\
&= 1 - P([X > n] \cap [Y > n]) \\
&= 1 - P(X > n)P(Y > n) \text{ par indépendance} \\
&= 1 - (1 - P(X \leqslant n))(1 - P(Y \leqslant n)) \\
&= 1 - (1 - F_X(n))(1 - F_Y(n)).
\end{aligned}$$

Dans de nombreux cas, on n'est pas obligé de d'aller jusqu'à la dernière ligne de ce calcul pour conclure !

Exemple 6 — Déterminer la fonction de répartition

1. du minimum de deux lois géométriques indépendantes de même paramètre,
2. du minimum de n lois géométriques indépendantes de même paramètre.

Méthode ***(Loi de*** $X+Y$***)***

1. Pour déterminer la loi de $X+Y$, on détermine d'abord $(X+Y)(\Omega)$. Si X et Y sont indépendante, c'est facile, on obtient

   $$(X+Y)(\Omega) = \{x+y, x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}.$$

   (voir la section Exemple si dessous).
2. Pour tout $n \in (X+Y)(\Omega)$, on calcule $P(X+Y=n)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

   $$P(X+Y=n) = \sum_{k \in X(\Omega)} P([X=k] \cap [Y=n-k]).$$

   Cette somme peut se calculer plus facilement si X et Y sont indépendantes car elle vaut alors

   $$\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k)P(Y=n-k).$$

   Elle est aussi souvent "limitable à une somme finie. (voir la section Remarque si dessous).

Attention

On ne saute pas l'étape 1, sauf si un résultat du cours répond directement à la question de la loi.

Exemple 7 — *Détermination de* $(X+Y)(\Omega)$ *dans le cas de VA indépendantes*

1. Si $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.
2. Si $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
3. Si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,m]\!]$ alors $(X+Y)(\Omega) = [\![0,n+m]\!]$.

Remarque 3.5 — Soit deux variables aléatoires indépendante à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P([X=k] \cap [Y=n-k]) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k).$$

Exemple 8 — Soient X, Y deux variables géométriques indépendantes de paramètres p et q. Déterminer la loi de $X+Y$.

3.2. Espérance de $g(X,Y)$

Théorème 3 | Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent un espérance, alors XY aussi et

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Corollaire 3

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui admettent un espérance, alors $\prod_{k=1}^{n} X_k$ aussi et

$$E(\prod_{k=1}^{n} X_k) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k).$$

Exemple 9 — Si $X_1, \dots X_n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs p_k. Quelle est l'espérance de $X_1 \dots X_n$?