CHAPITRE 32

Convergence des variables aléatoires

Ce chapitre, très court, est une introduction à la convergence et à l'approximation de variables aléatoires. Ce sujet sera largement approfondi en deuxième année.

1. INÉGALITÉS CLASSIQUES EN PROBABILITÉ

Théorème 1 | Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire (discrète) positive admettant un espérance, alors pour tout $\lambda > 0$,

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$

Remarque 1.1 — Dans le cadre variables aléatoires discrètes, comme la série

$$\sum_{n \geqslant 0} P(X = n) \text{ converge vers } 1,$$

on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} P(X \geqslant n) = 0.$$

Ce théorème nous donne donc la vitesse de convergence de la série vers 1.

Théorème 2 | Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Soit X une VA discrète qui admet une espérance et une variance alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque 1.2 — Vous devrez trouver un moyen de la retenir sans se tromper, pas le choix.

Exemple 1 — *Estimation d'un paramètre de Bernoulli* Soit (X_n) une suite de VA de Bernoulli de même paramètre, mutuellement indépendantes. Poisons $S_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$. On calcule

- $E(S_n) = \frac{E(\sum_{k=1}^n X_k)}{n} = \frac{np}{n} = p$,
- $$V(S_n) = \frac{V(\sum_{k=1}^n X_k)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n V(X_k)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n^2}.$$

  Comme pour tout $p \in [0,1]$, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, on obtient $V(S_n) \leqslant \frac{1}{4n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev appliquée à $\frac{S_n}{n}$ donne

$$P(|\frac{S_n}{n} - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

On souvent obtenir un "intervalle de confiance à 95 pour cents" pour p. En fait, si $\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leqslant 0.05$, alors

$$P\left(|\frac{S_n}{n} - p| < \varepsilon\right) \geqslant 0.95.$$

Pour cela on résout

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leqslant 0.05 &\iff \varepsilon^2 \geqslant \frac{1}{4 \times 0.05 \times n} \\ &\iff \varepsilon \geqslant \sqrt{\frac{5}{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour n, fixé, p a une probabilité supérieure à 0.95 d'être dans

$$\left[\frac{S_n}{n} - \sqrt{\frac{5}{n}}, \frac{S_n}{n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right].$$

Prenons un exemple concret : si on a lancé 5000 fois une pièce qui a une probabilité p de tomber sur Pile, on qu'on a obtenu 3000 Pile alors $\frac{S_n}{n} = \frac{3000}{5000} = \frac{3}{5} = 0.6$. On a $\sqrt{\frac{5}{n}} = \frac{1}{\sqrt{1000}} \simeq 0.03$. Alors p a une probabilité supérieure à 0.95 d'être dans $[0.57, 0.63]$.

2. LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Théorème 3 | Loi faible des grands nombres (LFGN)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Si elles admettent une espérance m et une variance alors si $\overline{X_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Remarque 2.1 — Ce théorème justifie l'approche des probabilités par les fréquences. En effet si les X_n suivent des lois de Bernoulli de paramètre p, alors cela assure que la fréquence de réussite de l'épreuve converge vers p.

Pour un événement A en général, en prenant la variable indicatrice de A :

$$X = 1_A = \begin{cases} 1 \text{ si } X \in A \\ 0 \text{ si } X \notin A \end{cases},$$

alors on obtient que la fréquence de réalisation de l'événement A converge vers P(A).

Remarque 2.2 — La condition de variance n'est pas nécessaire, mais la démonstration est plus difficile. C'est un résultat, à l'échelle des mathématiques, récent : moins d'un siècle !

Remarque 2.3 — Cette approche du calcul de probabilité par les fréquences a été largement étudiée en TP.

3. APPROXIMATION D'UNE LOI BINOMIALE PAR UNE LOI DE POISSON

Le calcul des probabilités d'une binomiale est parfois difficile, à cause des factorielles et des divisions par des petits nombres. Le théorème suivant justifie de remplacer les binomiales par des lois de Poissons.

Théorème 4 | Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit (X_n) une suite de VA suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ avec $\lambda > 0$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

où X suit une loi de Poisson $\mathbb{P}(\lambda)$.

Remarque 3.1 — Cette approximation a été traitée en TP.