CHAPITRE 5

Fonctions usuelles

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1.1. Opérations sur les fonctions

Définition 1 | Fonction

Une **fonction** f, définie sur un ensemble E est l'objet mathématique qui a un nombre $x \in \mathrm{E}$ associe une unique image $f(x)$. On note

$$f : x \in \mathrm{E} \mapsto f(x)$$

ou

$$x \mapsto f(x)$$

pour dire que la fonction f associe le nombre $f(x)$ à x.

Si y est une valeur prise par la fonction f. Alors un réel $x \in \mathrm{D}_f$ tel que $f(x) = y$ s'appelle un **antécédent de** y **par** f. A priori, un antécédent n'est pas unique : pour la fonction $x \mapsto x^2$, le réel 1 a deux antécédents 1 et -1.

Attention

On ne parle pas de la "fonction $f(x)$". C'est se tromper dans la nature des objets. En effet f est une fonction alors que $f(x)$ est un nombre !

Définition 2 | Domaine d'une fonction

L'ensemble des réels pour lesquels la fonction est définie s'appelle le domaine de la fonction. Pour une fonction f on le note souvent D_f.

Remarque 1.1 — Si la fonction est définie par une formule, il est intéressant de trouver le plus grand ensemble possible sur lequel la fonction peut être définie.

Exemple 1 —

1. La fonction peut être définie par une formule. Par exemple sur $\mathbb{R}$ on définit la fonction

   $$f : x \mapsto f(x) = e^x - x^2.$$

   On aurait aussi pu la définir sur tout domaine plus petit que $\mathbb{R}$.
   Une fonction peut être définie avec des formules différentes sur différentes parties de $\mathbb{R}$, par disjonction de cas. Par exemple on peut écrire

   $$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Une fonction peut être définie sur un ensemble fini auquel cas donner les valeurs en chaque nombre suffit. Par exemple la fonction h représentée par le tableau

x	0	1	2	1000
h(x)	5	-1	12	0

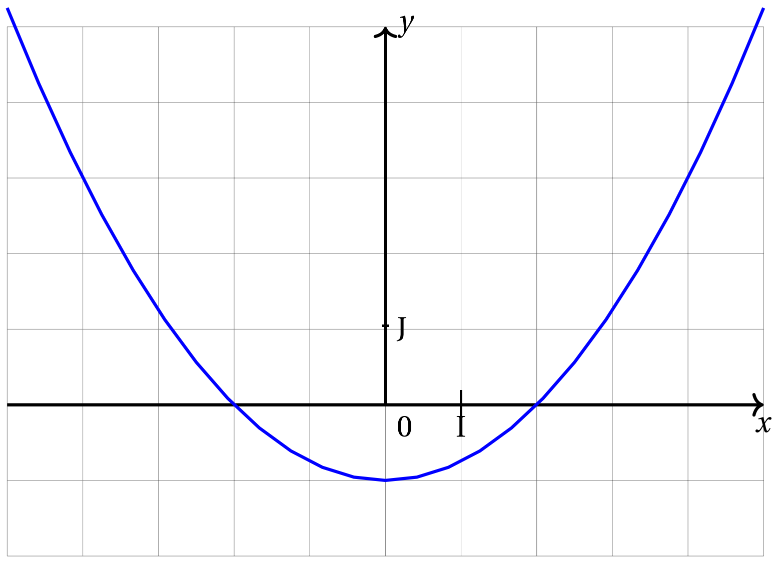
   est définie sur $\{0, 1, 2, 1000\}$ par $h(0) = 5$, $h(1) = -1$, $h(2) = 12$ et $h(1000) = 0$.

Remarque 1.2 — Les fonctions définies sur $\mathbb{N}$ sont les suites réelles.

Définition 3 | Courbe représentative

Soit f une fonction définie sur un domaine D_f. La courbe représentative de f, notée C_f est l'ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in D_f$, représentés dans un repère $(O; I; J)$ (en général orthonormé) du plan.

Exemple 2 —



On peut par exemple lire ici $f(2) = 0$ ou $f(4) = 3$.

Remarque 1.3 — Une fonction peut être définie par son graphe. On retrouve alors les images des points par lecture graphique.

Remarque 1.4 — La courbe représentative s'appelle aussi **le graphe de f.**

Définition 4 | Opérations sur les fonctions

Soient f, g deux fonctions définies **sur un même ensemble de départ** E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $f + g$ est la somme des fonctions f et g. C'est la fonction définie sur E par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. Cas particulier du cas précédent, $(f+\lambda)$ est la fonction définie sur E par $(f+\lambda)(x) = f(x) + \lambda$,
3. λf est la fonction définie sur E par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,
4. fg est le produit des fonctions f et g. C'est une fonction définie sur E par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$,
5. Si g ne s'annule pas sur E, $\frac{f}{g}$ est le quotient de f par g. C'est la fonction définie par $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple 3 —

Définition 5 | Fonctions composées

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et g une fonction définie sur un ensemble F. Si f est à valeurs dans F (c'est dire que $\forall x \in \mathrm{E}, f(x) \in \mathrm{F}$, on peut définir la fonction composée de f par g sur E :

$$\forall x \in \mathrm{E}, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 4 — Prenons $f = exp$ et $x \mapsto g(x) = x^2$. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies sur $\mathbb{R}$ avec

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = \exp(g(x)) = \exp(x^2)$,
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)^2 = \exp(x)^2 = \exp(2x)$.

Attention

Les exemples précédents montre que $f \circ g \neq g \circ f$ (sauf cas particulier). La composition de fonction n'est pas commutative !

Pire, l'une peut-être définie et pas l'autre. Considérons par exemple les fonctions $x \mapsto f(x) = -x^2$ et $x \mapsto g(x) = \ln(x)$. $g \circ f$ n'existe pas!

Proposition 1 | Associativité de la composition

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ sont des fonctions alors On $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. On peut noter sans ambiguïté $h \circ g \circ f$.

1.2. Fonctions bornées, fonctions monotones

Dans cette petite partie, les définitions sont analogues à celle que l'on avait sur les suites.

Définition 6 | Fonctions bornées

Soit f une fonction réelle définie sur I. On dit que f est :
1. **minorée** s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geqslant m$,
2. **majorée** s'il existe $\mathrm{M} \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant m$,
3. **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarque 1.5 — Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Définition 7 | Fonctions monotones

Soit f une fonction réelle définie sur I. On dit que f est :
1. **croissante** (sur I) si pour tout a et b dans I tel que $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$,
2. **décroissante** (sur I) si pour tout a et b dans I tel que $a \leqslant b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$,
3. **strictement croissante** (sur I) si pour tout a et b dans I tel que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$,
4. **strictement décroissante** (sur I) si pour tout a et b dans I tel que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$,
5. **monotone** (sur I) si elle est croissante ou décroissante sur I,
6. **strictement décroissante** (sur I) si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

1.3. Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition 8 | Fonctions paires, fonctions impaires

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathrm{D}_f \subset \mathbf{R}$ symétrique par rapport à 0 : si $x \in \mathrm{D}_f$, alors $-x \in \mathrm{D}_f$. La fonction f est dite :
1. **paire** si pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, $f(-x) = f(x)$,
2. **impaire** si pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

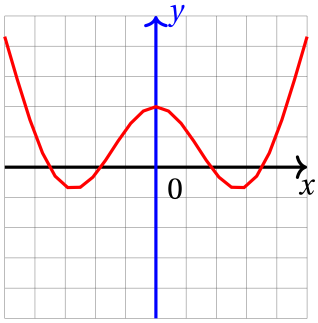
Définition 9 | Fonctions périodiques

Une fonction réelle est **périodique** s'il existe un réel $T > 0$ tel que

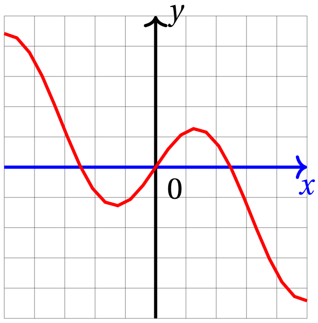
$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x+T) = f(x).$$

Proposition 2

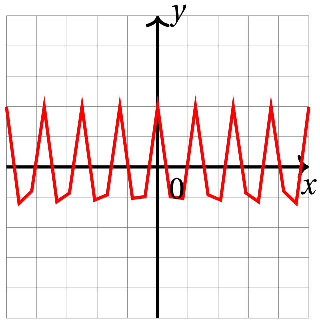
1. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
3. La courbe représentative d'une fonction périodique (de période T) est invariante par translation : les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(x-T)$ ont la même courbe représentative.



Fonction paire



Fonction impaire



Fonction périodique

Remarque 1.6 — Une fonction impaire définie en 0 vérifie forcément $f(0) = 0$ car $f(0) = -f(-0) = -f(0)$.

Exemple 5 —

1. la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto x + 3x^3$ est impaire,
2. la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto e^{x^2}$ est paire
3. la fonction $x \in]-1,1[\mapsto \ln(1-x^2)$ est paire.

Remarque 1.7 —

1. On dit aussi que la fonction est T-périodique, ou qu'elle admet T comme période, ou qu'elle est de période T.
2. T n'est pas unique : si f est T-périodique elle est forcément aussi 2T-périodique. On essaie de prendre la période la plus petite possible !

2. FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

2.1. Rappels : exponentielle et logarithme

Définition 10 | Exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$. On note aussi $\exp(x) = e^x$.

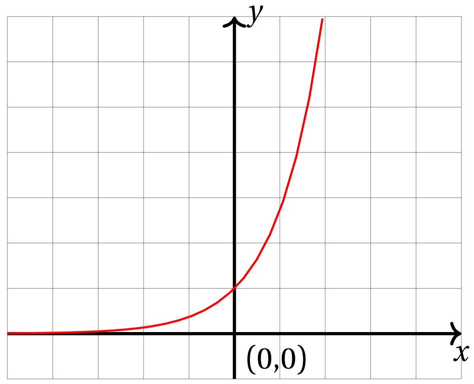
Proposition 3

Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

- $\exp(x) > 0$,
- $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
- $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$,
- $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
- la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

Représentation graphique.



Exemple 6 — Résoudre l'équation

$$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0.$$

Définition 11 | Logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien**, notée ln la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ vers $\mathbf{R}$.

Remarque 2.1 — Une autre définition de la fonction logarithme est

$$\ln(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt.$$

Proposition 4

- $\ln(1) = 0$,
- $\ln(e) = 1$,
- $\forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- $\forall x \in \mathbf{R}_+, \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$,
- $\lim_{x\to 0} \ln x) = -\infty$,
- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

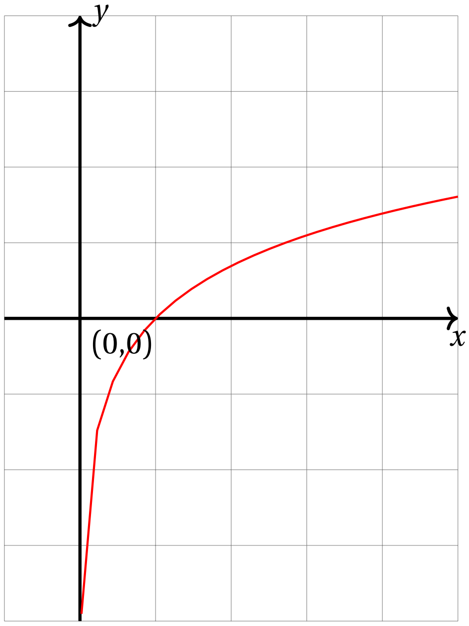
Proposition 5

Le logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

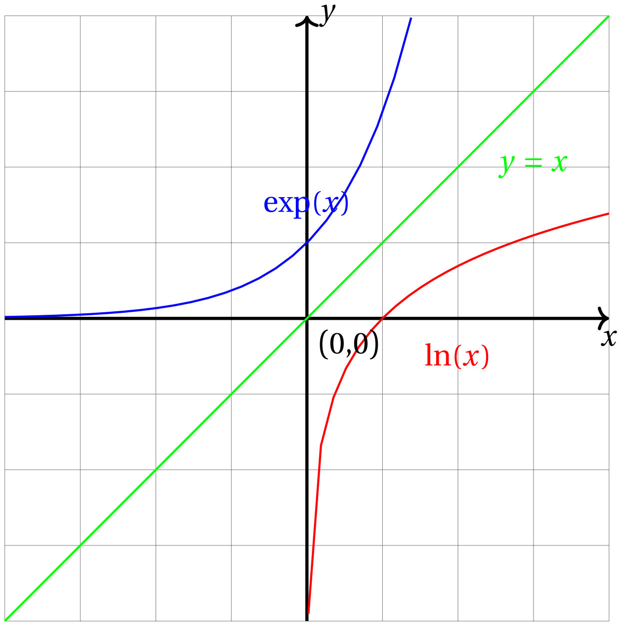
Représentation graphique.



Exemple 7 — Résoudre l'équation

$$2\ln(x) - \ln(3x) = 12.$$

Remarque 2.2 — Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre. Cela implique que leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la diagonale d'équation $y = x$.



Généralisations

Définition 12 | Autres fonctions exponentielles

Si $a > 0$ on peut définir la fonction exponentielle de base a par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x = \exp(\ln(a)x)$$

qui définit

1. une bijection décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si $0 < a < 1$,
2. une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ si $a = 1$,
3. une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si $a > 1$.

Proposition 6

Ces fonctions exponentielles vérifient les mêmes propriétés que l'exponentielle classique : pour tout x, y réels,

1. $a^x > 0$,
2. $a^{x+y} = a^x a^y$,
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. si $p \geqslant 0$, $(a^x)^p = a^{px}$.

2.2. Fonctions puissances

Dans cette partie, on souhaite généraliser les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ que l'on connaît déjà. Cela se basera sur la formule suivante, vraie grâce aux formule de calcul sur les puissances :

$$x^n = \exp(n \ln(x)).$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbf{R}$, mais pour généraliser à des fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, avec α un réel, on va devoir se restreindre à $\mathbf{R}_+^*$.

Définition 14 | Fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit une **fonction puissance** sur $\mathbf{R}_+$ par la formule

$$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

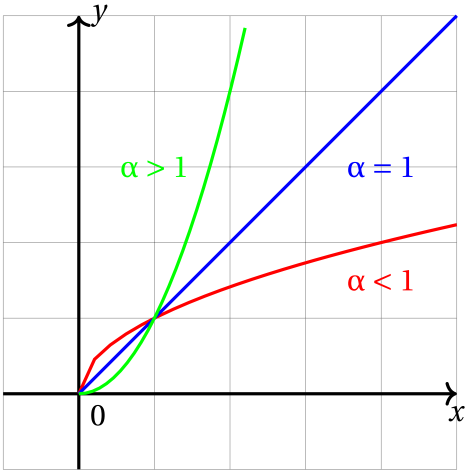
Ces fonctions ont un comportement différent en fonction du signe de α. On ne traite pas le cas $\alpha = 0$ car il est direct que cela correspond à une fonction constante égale à 1.

Cas $\alpha > 0$.

Proposition 7

Pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $[0, +\infty[$ et réalise une bijection strictement croissante.

x	0	$+\infty$
x^α	0 ↗	$+\infty$



Remarque 2.3 — Soit $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto x^{\alpha}$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont réciproques l'une de l'autre sur $]0, +\infty$. Leurs courbes sont donc symétriques par rapport à l'axe d'équation $y = x$. C'est le cas sur la figure précédente.

Remarque 2.4 — Les tracés pour $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$ sont vraiment différents ! Un chapitre ultérieur est consacré à la notion de convexité qui expliquera cela.

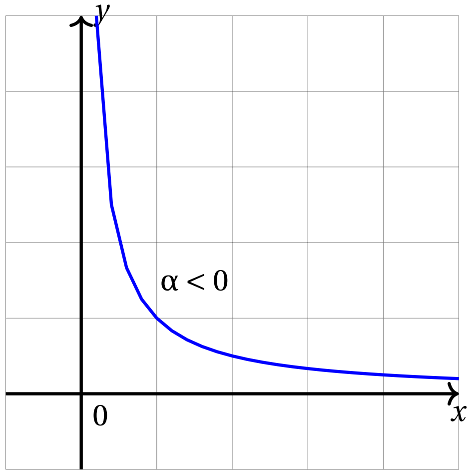
Remarque 2.5 — Pour $\alpha \geqslant 1$, les fonctions sont dérivables sur $[0, +\infty[$. Pour $\alpha < 1$, elles le sont uniquement sur $]0, +\infty[$. Cela se voit à la tangente verticale en 0.

Cas $\alpha < 0$.

Proposition 8

Pour $\alpha < 0$, la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ est définie sur $]0, +\infty[$ et réalise une bijection strictement décroissante de cet ensemble.

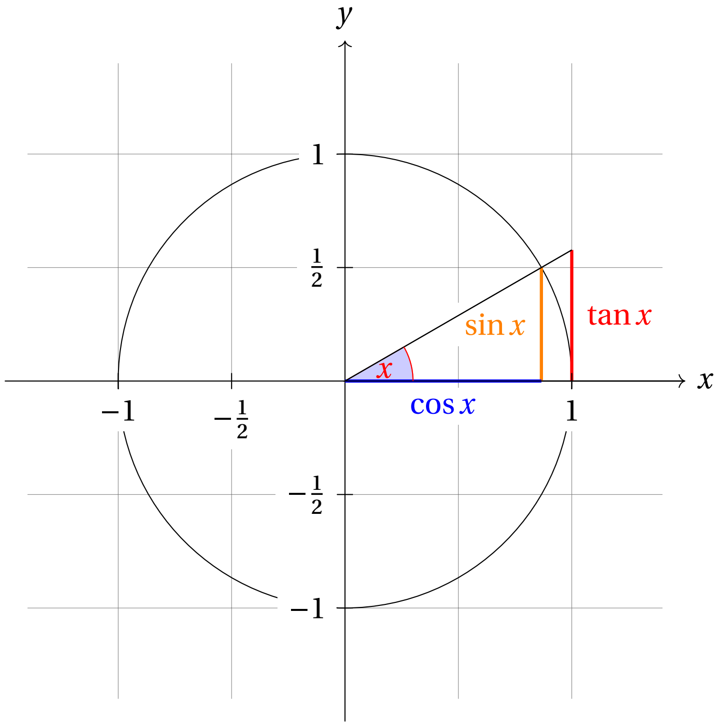
x	0	$+\infty$
x^{α}	$+\infty$ ↘	0



2.3. Fonctions trigonométriques

Définition 15 | Fonctions $\cos$ et $\sin$

Le **cosinus** d'un nombre réel x (ou d'un angle exprimé en radians), est l'abscisse du point obtenu en reportant la longueur x le long du cercle unité (en partant du points $(0;1)$. Le **sinus** d'un nombre est son ordonnée. On définit des fonctions réelles **cosinus** et **sinus** qui à un réel x associent ces nombres. On les note $\cos$ et $\sin$.



Des valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus sont à connaître.

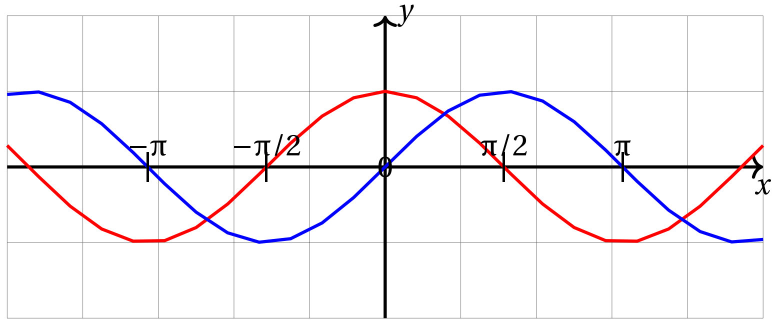
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour trouver les autres valeurs remarquables, on se réfère au cercle trigonométrique et aux égalités suivantes.

Proposition 9

Pour tout réel x,

1. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
2. $\cos(-x) = \cos(x)$: la fonctions cos est **paire**,
3. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
4. $\sin(-x) = -\sin(x)$: la fonction sin est **impaire**.



Proposition 10

Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a les équivalences

- $\cos(x) = \cos(y) \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$,
- $\sin(x) = \sin(y) \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$.

Exemple 8 — Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
2. $\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = 1$.

Théorème 1

Pour tout réel x,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Proposition 11

Pour tous réels a et b,

1. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
2. $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.

Corollaire 1

Pour tout réel x,

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Théorème 2

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbf{R}$:

1. $\cos'(x) = -\sin(x)$,
2. $\sin'(x) = \cos(x)$.

Définition 16 | Fonction tangente

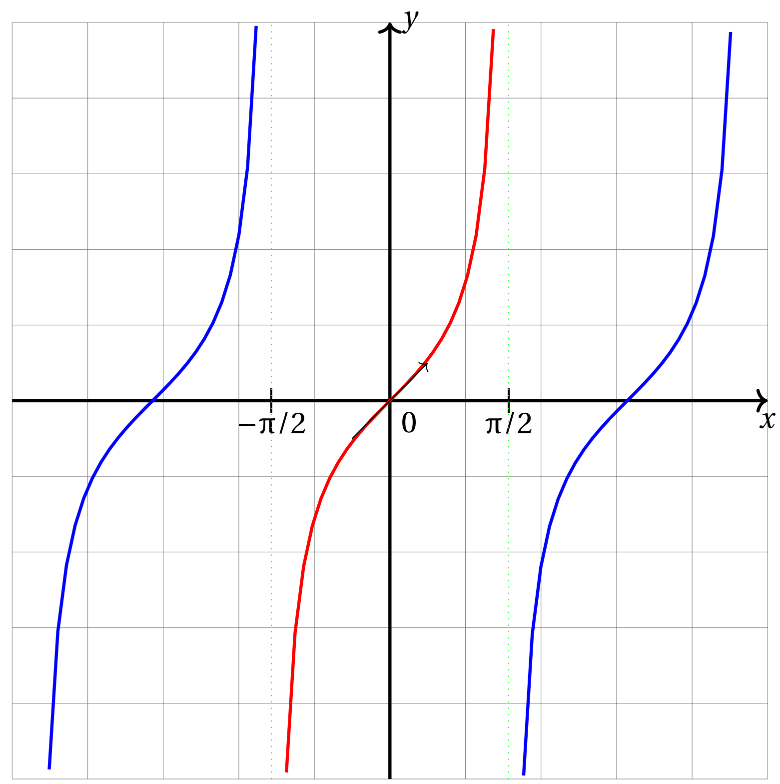
La fonction tangente, notée tan est définie sur $\mathbf{R}\backslash\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Théorème 3

La fonction tangente est une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$.

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\tan(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$-\infty$



Remarque 2.6 — Le tableau des valeurs remarquables se complète comme ceci. On prêtera particulièrement attention à la valeur $\tan(\frac{\pi}{4}) = 0$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Remarque 2.7 — La fonction tangente est impaire.

Définition 17 | Fonction Arctangente

La bijection réciproque de la fonction tan s'appelle la fonction **Arctangente**, note arctan. Elle est définie sur $\mathbf{R}$ et réalise une bijection croissante vers $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Théorème 4

1. La fonction tan est dérivable sur tout intervalle de la forme $]k-\frac{\pi}{2},k+\frac{\pi}{2}$ (où $k\in\mathbf{Z}$) et

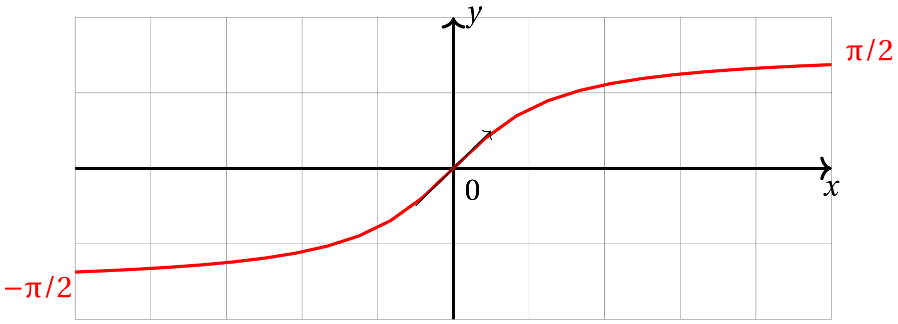
$$\forall x\in]k-\frac{\pi}{2},k+\frac{\pi}{2}[,\tan'(x)=1+\tan(x)^2=\frac{1}{\cos(x)^2}.$$

2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x\in\mathbf{R},\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

On peut dresser le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe de la fonction arctan.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$



Remarque 2.8 — La fonction Arctangente est impaire.

Remarque 2.9 — On retiendra la valeur remarquable $\arctan(\frac{\pi}{4}) = 1$ et la tangente $\arctan'(0) = 1$.

Proposition 12

1. La fonction **cosinus** est 2π -périodique,
2. La fonction **sinus** est 2π -périodique,
3. La fonction **tangente** est π -périodique.