

TD 5 - Fonctions usuelles, généralités sur les fonctions

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto x + 1$, $g : x \mapsto \ln(x)$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$. Donner les domaines de définitions et les expressions de $h \circ f$, $h \circ g$, $f \circ h$, $f \circ g$, $g \circ h$, $g \circ f$?

Exercice 2 Donner les domaines de définitions des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = e^{x^3}$, $g(x) = \ln(x)$,
3. $f(x) = 3^x$ et $g(x) = \ln(2x - 10)$.

Exercice 3 Soit f une fonction dérivable paire. Montrer que f' impaire. Que dire si f est impaire?

Exercice 4 Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires?

1. $f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}$
2. $g : x \mapsto \sin(x + x^3 + x^5)$,

3. $h : x \mapsto e^{x^2 \cos(x)}$.

Exercice 5 Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques et déterminer la plus petite période possibles :

1. $f : x \mapsto \cos(2x) + \sin(4x)$,
2. $[2x] - 2x$
3. $\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{x}{8}\right)$,
4. $\cos(x + 2\pi[x])$.

2. FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Exercice 6 Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x + e^{-x} = 5$,
2. $\ln(x)^2 - 4\ln(x) + 2 = 0$,
3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
4. $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$,
5. $x = \sqrt{x} - 2$.
6. $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \frac{1}{2}$.

Exercice 7 En utilisant les symétries et les formules de duplication, calculer $\cos(\frac{9\pi}{8})$ et $\sin(\frac{9\pi}{8})$.

Exercice 8 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(3x) + 3 \cos(x) = 4 \cos^3(x).$$

Exercice 9 Résoudre les équations :

1. $\tan(2x) = \frac{\pi}{4}$,
2. $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(-x)$,
3. $\tan(x + 2) = 12$.

Exercice 10 Trouver une formule pour $\tan(x + y)$.

Exercice 11 Soit f la fonction définie par

$$x \in \mathbf{R}^* \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

En dérivant f , déduire les valeurs prises par f .

Exercice 12

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, simplifier

$$\cos(\text{Arctan}(x)), \sin(\text{Arctan}(x)), \tan(\text{Arctan}(x)).$$

2. Pour tout $x \in D_{\tan}$, simplifier

$$\text{Arctan}(\tan(x)).$$

3. Montrer la **Formule de Machin** :

$$\frac{\pi}{4} = 5 \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$