

CHAPITRE 6

Ensembles et applications

1. ENSEMBLES, PARTIES D'UN ENSEMBLE

1.1. Généralités

Définition 1 | Ensemble

On appelle **ensemble** toute collection d'objet. Si un élément x appartient à l'ensemble E , on note $x \in E$. Sinon on note $x \notin E$.

Exemple 1 — Ensembles classiques de $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$. Il contient plusieurs sous ensembles à connaître :

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels,
2. $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs
3. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$
4. $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : c'est les nombres qui s'écrivent $\frac{n}{10^k}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2 — Ensembles finis Les ensembles qui contiennent un nombre fini d'éléments se note $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où les x_i sont les éléments de l'ensemble. Cet ensemble contient n éléments, on dit qu'il est de cardinal n et on note

$$\text{card}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = n.$$

Exemple 3 — Ensemble vide L'unique ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide. On le note $\emptyset$. Tout élément x vérifie alors $x \notin \emptyset$. L'ensemble vide n'est pas particulièrement intéressant à étudier, mais il sert à décrire des situations impossibles. Par exemple l'ensemble des entiers à la fois pairs et impairs est l'ensemble vide.

Tous les ensembles ne sont pas des ensembles de nombres, il existe par exemple :

1. les ensembles de fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui même,
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles.
3. $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ est l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, 2\}$. Il est de cardinal 4.

Remarque 1.1 — $\{\emptyset\}$ est un ensemble d'ensembles, qui ne contient que l'ensemble vide comme élément. Il est de cardinal 1.

Pour définir un ensemble au delà des ensembles de référence, il y a principalement deux méthodes :

1. la description par extension : il s'agit de décrire explicitement l'ensemble à partir d'un ou d'autres ensemble. Par exemple

$$\{2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

est l'ensemble des entiers relatifs pairs. En général, un tel ensemble s'écrit

$$\{f(x), x \in X\} \text{ où } X \text{ est un ensemble donné et } f \text{ une fonction.}$$

2. la description par compréhension : il s'agit de décrire un ensemble comme les éléments d'un ensemble donné vérifiant une certaine propriété. Formellement cela s'écrit

$$\{x \in X, P(x)\} \text{ où } P(x) \text{ est une proposition logique.}$$

Par exemple

$$\{x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0\}$$

est l'ensemble des réels pour lesquelles l'égalité $\cos(x) = 0$ est vraie.

Exemple 4 — Décrire l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0\}$ par une présentation par extension.

On sait que $\cos(x) = 0$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ainsi

$$\{x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1.2. Sous-ensemble, parties d'un ensemble

Dans cette partie, E est un ensemble quelconque.

Définition 2 | Sous-ensemble

Soit F un ensemble, on dit que $F \subset E$ (que F est inclus dans E) si

$$\forall x \in F, x \in E.$$

Remarque 1.2 — On dit aussi que

- F est une partie de E ,
- F est un sous-ensemble de E .

Définition 3 | Ensemble des parties de E

On appelle **ensemble des parties** de E et on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par tous les sous ensembles de E .

Remarque 1.3 — On a équivalence entre

1. $F \subset E$,
2. $F \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 5 — Les ensembles suivants sont des parties de $\mathbf{R}$:

- les entiers naturels $\mathbf{N}$,
- les réels positifs $\mathbf{R}_+$,
- les intervalles $[a, b]$ (et les autres intervalles ...)
- plein d'autres (imaginons $\{2\} \cup]3, 5] \cap \mathbf{Q}$).

1.3. Opérations sur les ensembles

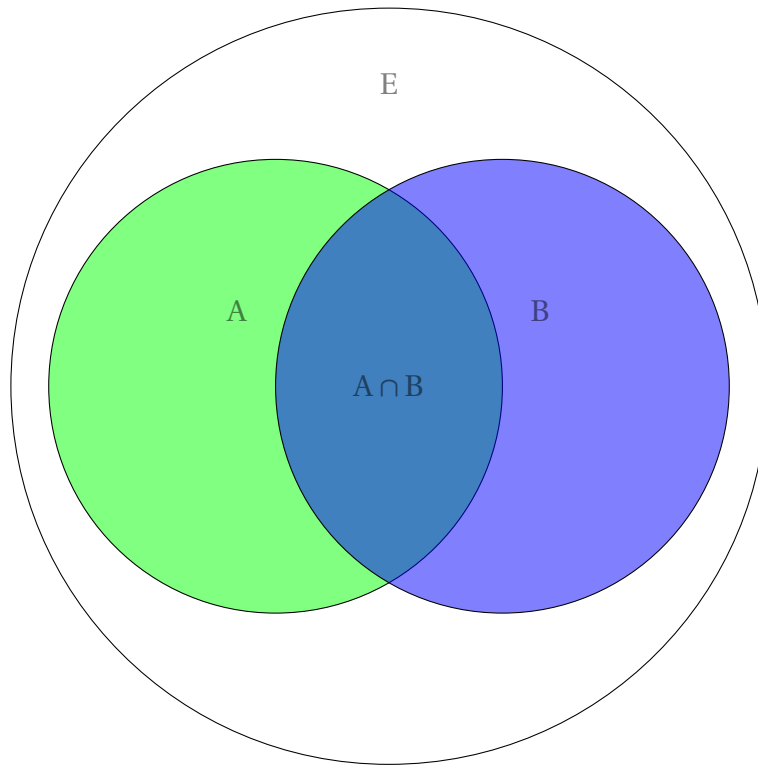
Si $F \subset E$ et $G \subset E$ sont des parties de E , on peut réaliser différentes opérations pour construire d'autres parties de E .

Définition 4 | Opérations sur les ensembles

Soient F et G deux parties de E . On définit :

- le complémentaire de F , noté $\bar{F}$ (ou $C_E F$) : $\bar{F} = \{x \in E : x \notin F\}$. C'est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F .
- l'union, notée, $F \cup G = \{x \in E : x \in F \text{ ou } x \in G\}$. C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent au moins à F ou G . On le prononce "F union G" ou "l'union de F et G".
- l'intersection, notée, $F \cap G = \{x \in E : x \in F \text{ et } x \in G\}$. C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à F et à G . On le prononce "F inter G" ou "l'intersection de F et G".

- si $F \subset G$, on peut définir $G \setminus F = \{x \in G, x \notin F\}$ que l'on appelle "G privé de F".



Attention

L'union correspond au "OU" logique, qui n'est pas exclusif.

Remarque 1.4 —

- le complémentaire correspond au "NON" logique,
- l'intersection correspond au "ET" logique.

Exemple 6 — Déterminer :

1. $] -5, 2[\cap \mathbf{R}_+$
2. $] -\infty, 0] \cup \mathbf{R}_+^*$
3. $\overline{\mathbf{R}_+}$.

Proposition 1 | Distributivité

Soient A, B, C des parties de E . Alors :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Théorème 1 | Lois de de Morgan

Soient A et B deux parties de F , on a

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

**Vocabulaire**

Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de E . Si

1. $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ (l'union des ensembles donne l'ensemble complet)
2. pour tout i, j des indices avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (les parties sont deux à deux disjointes),

alors on dit que les sous-parties A_i forment une partition de E . Par exemple si $A \subset E$, alors A et $\overline{A}$ forment toujours une partition de E . Il sera très utile, notamment en probabilités, de trouver des partitions d'ensembles.

Remarque 1.5 — Ces lois ont en mettre en lien avec les formules propositionnelles

1. $\text{non}(P \text{ OU } Q) = (\text{non } P) \text{ ET } (\text{non } Q)$,
2. $\text{non}(P \text{ ET } Q) = (\text{non } P) \text{ OU } (\text{non } Q)$.

Le lien est même exact en prenant les propositions

- $P : x \in A$,
- $Q : x \in B$.

Définition 5 | Produit cartésien

Si E et F sont deux ensembles, on peut former un autre ensemble appelé leur **produit cartésien** (ou simplement produit) $E \times F$. C'est l'ensemble des couples formés d'un élément de E d'un élément de F , ou encore

$$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}.$$

Remarque 1.6 — En terme de quantification, c'est la même chose d'écrire

$$\forall (x, y) \in E \times F \text{ ou } \forall x \in E, \forall y \in F.$$

Remarque 1.7 — On peut le faire avec un nombre quelconque d'ensemble : par exemple $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) avec $x \in E, y \in F, z \in G$.

Définition 6 | Ensemble E^n

Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer les produits $E^n = E \times \cdots \times E$ où l'ensemble E est répété n fois. C'est l'ensemble des n -uplets

$$\{(x_1, \dots, x_n), x_1 \in E, \dots, x_n \in E\}.$$

Exemple 7 — On a déjà rencontré $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ respectivement les ensembles de couples et de triplets de nombres réels. De même, on peut définir $\mathbf{R}^n$ l'ensemble des n -uplets de réels. Par exemple $(1, 1, 1, \dots, 1)$, où 1 est répété n fois, est un élément de $\mathbf{R}^n$.



Méthode (Montrer que deux ensembles sont égaux)

Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on a deux solutions.

Méthode 1 : raisonner par équivalence. C'est une méthode directe. Dans certains cas c'est la plus rapide, mais elle peut mener à des erreurs de raisonnement si on se trompe sur les équivalences.

1. On fixe un élément quelconque $x \in E$.
2. On écrit la définition de $x \in E$.
3. On "déroule des équivalence" en espérant arriver à $x \in F$ à la fin.

Méthode 2 : raisonner par double inclusion. Pour montrer qu'un ensemble $E = F$, on montre séparément que $F \subset E$ et $E \subset F$. Ici dans chacune des étapes on peut raisonner par implication, ce qui est moins dangereux que raisonner par équivalence.

Exemple 8 — Soient $A = \{n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq -1\}$. Montrer que $A = B$.

On raisonne par double inclusion :

$A \subset B$. Soit $x \in A$, montrons que $x \in B$. $x \in A$ signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = n - 1$. Ainsi $x \in \mathbb{Z}$ car c'est la différence entre deux entiers. De plus, comme $n \geq 0$, $n - 1 \geq -1$ donc $x \geq -1$. Ainsi $x \in B$. C'est vrai quelque soit $x \in A$, donc $A \subset B$.

$B \subset A$. Soit $x \in B$. Montrons que $x \in A$, c'est à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = n - 1$. Cherchons n :

$$x = n - 1 \iff n = x + 1.$$

Comme $x \in \mathbb{Z}$, $n = x + 1$ est bien un entier, et comme $x \geq -1$, $n \geq 0$, donc $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $n = x + 1$ convient, donc $x \in A$. C'est vrai quelque soit $x \in B$, donc $B \subset A$.

Par double inclusion, on a montré que $A = B$.

1.4. Cas du cardinal fini

Définition 7 | Ensemble fini, cardinal

Un ensemble E est dit **fini** s'il est en bijection avec un ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas là, l'entier n est unique et on l'appelle cardinal de E , noté $n = \text{card}(E)$.

Remarque 1.8 — Par convention, le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Proposition 2

Soient A et B deux ensembles de cardinal fini. Si $A \subset B$ alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.

Dans la suite de cette partie, E est un ensemble de cardinal n .

Proposition 3 | Parties de E

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il y a exactement $\binom{n}{p}$ parties de E qui sont de cardinal p .

Proposition 4

Soit E un ensemble de cardinal n , alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble de cardinal 2^n .

Preuve Comme les parties de E ont entre 0 et n éléments, le nombre total de parties de E est

$$\begin{aligned} \text{card} \mathcal{P}(E) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\ &= (1+1)^n \text{ par la formule du binôme de Newton} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Proposition 5

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E , alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Proposition 6

Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = m$ alors

1. $\text{card}(E \times F) = m \times n$,
2. $\text{card}(\mathcal{F}(E, F)) = m^n$.

Exemple 9 — Si $E = \{A, B\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$ alors

$$E \times F = \{(A, 0), (A, 1), (A, 2), (B, 0), (B, 1), (B, 2), \}.$$

On obtient bien $2 \times 3 = 6$ éléments.

2. APPLICATIONS

Dans toute cette partie, E, F et G sont des ensembles.

Définition 8 | Application de E dans F

Une application f de E dans F est l'association de tout élément $x \in E$ à un unique élément $f(x) \in F$.

Σ

Vocabulaire

Soit f une application de E dans F .

1. Soit $x \in E$. L'image de x par f est l'élément $f(x)$ de F .
2. Soit $y \in F$. On dit que $x \in E$ est un antécédent de y par f si $f(x) = y$.

Remarque 2.1 — L'ensemble des applications (ou des fonctions) de E dans F est un ensemble, parfois noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Exemple 10 — L'application de E dans E qui à un élément x associe toujours le même élément x s'appelle **l'application identité de E dans E** . On la note Id_E .

Exemple 11 — Les fonctions réelles sont les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (donc avec $E = F = \mathbf{R}$).

Définition 9 | Image d'une application

Soit f une application de E dans F . L'image de E par f est l'ensemble

$$f(E) = \{f(x), x \in E\}.$$

Exemple 12 — Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est l'application définie par $f(x) = x^2$, alors $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$.

Définition 10 | Image directe d'une partie

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre deux ensembles.

Si $A \subset E$ est une partie de E , **l'image (ou image directe)** de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \in F : x \in A\}.$$

C'est un sous-ensemble de F . Il est caractérisé par

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A : f(x) = y.$$

Définition 11 | Image réciproque d'une partie

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre deux ensembles. Si $B \subset F$ est une partie de F , **l'image réciproque** de B est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

C'est un sous ensemble de E . Il est caractérisé par

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

Remarque 2.2 — On ne fera pas d'étude théorique sur les images réciproques de parties, mais on en reparlera dans les chapitres d'algèbre linéaire et de probabilités.

Exemple 13 — Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carrée sur $\mathbf{R}$.

1. L'image directe de $[-2, 4[$ est $f([-2, 4[) = [0, 16[$.
2. L'image réciproque de $[2, +\infty[$ est $f^{-1}([2, +\infty[) =]-\infty, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

Définition 12 | Composée de deux applications

Soit f une application de E dans F et g une application de F . Alors on peut définir la composée de f et g par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

C'est une application de E dans G .

Remarque 2.3 — Pour définir $g \circ f$, il suffit que g soit définie sur $f(E) \subset F$ et pas forcément sur F tout entier.

Exemple 14 —

1. soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ et $g = \exp$ la fonction exponentielle. On peut bien définir $g \circ f$ sur $\mathbf{R}$ tout entier.
2. soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$, et $\ln$ la fonction logarithme népérien définie sur $\mathbf{R}_+$. On peut définir $\ln \circ f$ sur $\mathbf{R} \setminus [-1, 1]$ car c'est le domaine sur lequel f est strictement positive, donc $f(x)$ est dans le domaine de $\ln$.

2.1. Applications injectives, surjectives, bijective**Définition 13 | Application surjective**

Une application $f : E \rightarrow F$ est **surjective** si $g(E) = F$. (C'est à dire que tous les éléments de F sont dans l'image de E , ou encore que tout élément de F admet un **antécédent** par f .).

**Méthode (Montrer qu'une application est surjective)**

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective, il faut montrer que

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

1. On fixe un élément quelconque de $y \in F$.
2. On cherche un $x \in E, f(x) = y$, par exemple en résolvant une équation.
3. On conclut que f est surjective.

Exemple 15 — On veut montrer que $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $x^3 + 1$ est surjective.

Soit $y \in \mathbf{R}$, cherchons un réel x tel que $f(x) = y$, autrement dit $y = x^3 + 1$ donc $x = \sqrt[3]{y - 1}$. Comme x existe pour tout réel y , on conclut que f est surjective.

Remarque 2.4 — Avec les théorèmes de continuité (comme le Théorème des Valeurs Intermédiaires que nous reverrons), on peut montrer qu'une fonction est surjective en étudiant son tableau de variation.

Remarque 2.5 — Montrer qu'une application n'est pas surjective est très simple. En effet la négation de la propriété

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

est une proposition en "il existe". Il suffit donc de trouver un élément de y de F qui n'est jamais atteint par f . Par exemple on peut dire $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective car -1 n'appartient pas à l'image de f (ou autrement dit, -1 n'a pas d'antécédent).

Remarque 2.6 — La notion de surjectivité dépend de ce qu'on prend pour ensemble d'arrivée. Ainsi un tableau de variation montre aisément que $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est surjective.

Définition 14 | Application injective

Une application $f : E \rightarrow F$ est **injective** pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$. (C'est à dire que deux éléments distincts de E auront une image différente par f .)



Méthode (Montrer qu'une application est injective)

Pour prouver qu'une application est injective, on utilise souvent la **contraposée** de la définition. C'est à dire que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$. On commence donc par supposer que $f(x) = f(y)$ et par raisonnement ou calcul on arrive à x et y .

Exemple 16 — Par exemple, montrons que l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ est injective. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x) = f(y)$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \text{ donc } x^2 + 1 = y^2 + 1 \\ &\text{donc } x^2 = y^2 \\ &\text{donc } x = -y \text{ ou } x = y \\ &\text{donc } x = y \text{ car } x \text{ et } y \text{ sont des réels positifs.} \end{aligned}$$

Donc $x = y$. Ainsi f est injective.

Théorème 2

Soit f une fonction réelle strictement monotone. Alors f est injective.

Remarque 2.7 — Il est facile de montrer qu'une application n'est pas injective : il suffit de trouver deux éléments x et y distincts de l'ensemble de départ qui ont la même image par f .

Définition 15 | Application bijective

Une application f de E dans F est **bijjective** s'il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$. C'est équivalent à l'assertion

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

Remarque 2.8 — Une application bijective est aussi appelée une **bijection**. On dit aussi que E et F sont des ensembles *en bijection*.

 Notation

La fonction g est appelée **bijection réciproque** de f , notée souvent f^{-1} .

Théorème 3

Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

 Méthode (*Montrer qu'une application est bijective*)

Pour montrer que qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective, on a deux méthodes.

Méthode 1. On montre que f est injective et surjective.

Méthode 2. On prouve l'assertion

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

Pour cela

1. On fixe y quelconque un élément de F .
2. On prouve qu'il existe un unique $x \in E, f(x) = y$, parfois en résolvant l'équation $y = f(x)$.

Remarque 2.9 — Une étude de fonction, et un tableau de variations, peut aussi prouver qu'une fonction est bijective. Cela sera un Théorème dans un chapitre ultérieur.

Remarque 2.10 — La méthode par la résolution de l'équation est la seule qui donne une formule explicite pour la réciproque. Attention, on ne trouve pas toujours de formule explicite; c'est pour cela que l'on a introduit la fonction arctangente par exemple, qui était définie comme la réciproque de tangente sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Remarque 2.11 — Dans l'exemple $f : x \in \mathbf{R} \mapsto y^3 + 1 \in \mathbf{R}$, on a en fait montré la bijectivité par la deuxième méthode. Celle-ci à l'avantage de nous donner une formule pour $f^{-1}(y)$. Ici $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y^2 - 1}$.

Remarque 2.12 — Il est facile de montrer qu'une fonction n'est pas bijective, il suffit de montrer qu'elle n'est pas surjective ou qu'elle n'est pas injective.

Remarque 2.13 — On peut résumer les propriétés d'injectivité / surjectivité / bijectivité ainsi : soit $f : E \rightarrow F$ une application, alors elle est

1. **injective** si pour tout y dans F , y admet **au maximum** un antécédent par f . C'est à dire que pour tout $y \in F$, l'équation

$$y = f(x)$$

admet aucune ou une solution dans E .

2. **surjective** si pour tout y dans F , y admet **au moins** un antécédent par f . C'est à dire que pour tout $y \in F$, l'équation

$$y = f(x)$$

admet au moins solution dans E .

3. **bijective** si pour tout y dans F , y admet **exactement** un antécédent par f . C'est à dire que pour tout $y \in F$, l'équation

$$y = f(x)$$

admet exactement une solution dans E .

Théorème 4

1. La composée de deux applications surjectives est surjective.
2. La composée de deux applications injectives est injective.
3. La composée de deux applications bijectives est bijective.

Théorème 5

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2.2. Le cas particulier du cardinal fini

Théorème 6 | Lien avec le cardinal

Soit f une application entre E et F deux ensembles de cardinal fini, alors

1. si f est surjective alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$
2. si f est injective alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$
3. si f est bijective alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

Théorème 7

Soit E et F deux ensembles de cardinal fini. Ils sont en bijection si et seulement si $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

Proposition 7

Soit E et F deux ensembles de même cardinal n . Si $E \subset F$ alors $E = F$.

Proposition 8

Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = m$ alors $\text{card}(\mathcal{F}(E \times F)) = m^n$.

2.3. Restrictions et prolongements

Dans cette petite sous-partie, $E_1 \subset E$ est une sous-partie de E et f une application de E dans F .

Définition 16 | Restriction d'une application

La restriction de f à E_1 , notée f_{E_1} est l'application de E_1 dans F qui coïncide avec f sur E_1 .

Définition 17 | Prolongement d'une application

Si h est une application de E_1 dans F , alors $\tilde{h}$ est un prolongement de E_1 à E si

1. $\tilde{h}$ est une application de E dans F ,
2. h est la restriction de $\tilde{h}$ à E_1 :

$$\forall x \in E_1, \tilde{h}(x) = h(x).$$