Thomas Cometx

CHAPITRE 7

Suites réelles

Définition 1 | Suite réelle

Une suite réelle est une application u de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{N}$. On la note $u : n \in \mathbf{N} \to u_n \in \mathbf{R}$. On la note aussi (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. u_n est appelé le terme général de la suite.

Exemple 1 — Les suites peuvent être définies de plusieurs façons.

1. par une formule explicite : $u_n = 3n - 5$, $v_n = 10^n - 1$.
2. par une relation de récurrence : on donne $u_0 = 5$ et une formule reliant u_{n+1} aux termes précédents comme par exemple $u_n = e^{u_n}$.

Remarque 0.1 — Comme d'habitude, il ne faut pas se tromper dans la nature des objets : (u_n) est une **suite**, c'est à dire une application, alors que u_n est un réel, le n-ième terme de la suite. Ainsi on n'écrira **jamais** "la suite u_n".

1. DÉFINITIONS

1.1. Opérations sur les suites

Si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles, et λ un réel, on définit

1. la somme des suites : $(u_n + v_n)$ est la suite de terme général $u_n + v_n$,
2. (λu_n) la suite de terme général λu_n,
3. le produit des suites : $(u_n v_n)$ est la suite de terme général $u_n v_n$.

1.2. Sens de variation

Soit u une suite réelle, on dit que

- u est croissante si $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$,
- u est strictement croissante si $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$,
- u est décroissante si $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$,
- u est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} < u_n$,
- u est monotone si elle est croissante ou décroissante,
- u est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante,
- u est constante si $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n$,
- u est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est à dire que

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0 u_n = u_{n_0}.$$

Définition 2 | Propriété vraie à partir d'un certain rang

Une propriété vraie à partir d'un certain est une propriété $\mathscr{P}(n)$ qui est vrai dès que $n \geqslant n_0$ où n_0 est fixé.

1.3. Suites convergentes

Définition 3 | Suite convergente

On dit qu'une suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \mathbf{R}$ si tout intervalle contenant le réel ℓ contient tous les réels u_n sauf pour un nombre fini de valeurs de n.

Σ **Vocabulaire**

On dit que
- La suite (u_n) converge vers ℓ,
- La suite (u_n) admet ℓ pour limite,
- ℓ est la limite de la suite (u_n).
- La suite (u_n) est convergente et sa limite est le réel ℓ.

Remarque 1.1 — Il faut connaître la définition avec des quantificateurs :

$$\lim_n u_n = \ell \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant \epsilon.$$

Dans la majorité des cas, on aura des théorèmes pour démontrer qu'une suite converge vers un réel ℓ, mais dans certains cas compliqués, cette définition pourra nous être utile.

Cette définition dite "avec des ϵ" s'illustre comme ceci. La suite représentée tend vers 1 et aussi petit soit le "tube" tracé autour de 1, tous les termes de la suites finiront dans ce tube à partir d'un certain rang n_0. Bien sûr, plus le tube est fin, plus on peut avoir besoin de n_0 grand.

Par exemple pour montrer que

$$\lim_n \frac{1}{2^n} = 0,$$

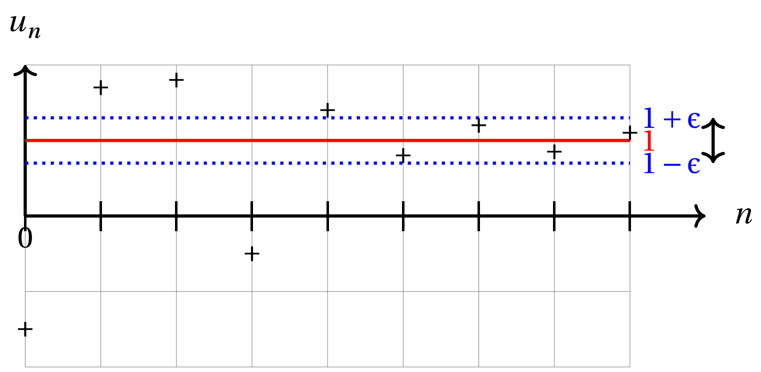
on rédige ainsi : soit $\epsilon > 0$ (fixé quelconque), alors on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\, g e n_0 |\frac{1}{2_n}| \leqslant \epsilon.`$$

Or

$$\begin{aligned}|\frac{1}{2^n}| \leqslant \epsilon &\iff \frac{1}{2^n} \leqslant \epsilon \\ &\iff 2^n \geqslant \frac{1}{\epsilon} \\ &\iff n\ln(2) \geqslant -\ln(\epsilon).\end{aligned}$$

on prend alors $n_0 = \lfloor \frac{-\ln(\epsilon)}{\ln(2)} \rfloor$ et on voit que plus ϵ est petit, plus n_0 devient grand !



Vocabulaire

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Définition 4 | Suite qui tend vers l'infini

Soit (u_n) une suite réelle.

1. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient

tous les termes de u_n sauf éventuellement un nombre fini de termes (c'est à dire à partir d'un certain rang).
2. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si pour tout intervalle de la forme $]-\infty, A]$ contient tous les termes de u_n sauf éventuellement un nombre fini de termes (c'est à dire à partir d'un certain rang).

Remarque 1.2 — Les traductions avec des quantificateurs de ces notions sont :

$$\lim_n u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$$

et

$$\lim_n u_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant A.$$

Attention

Une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est une suite divergente.

Exemple 2 —

1. Les suites constantes ou stationnaires sont convergentes vers ce point de stationnement.
2. Les suites géométriques de raison $q \in]-1, 1[$ convergent vers 0,
3. Les suites géométriques de raison $q > 1$ divergent vers $+\infty$ si $u_0 > 0$ et vers $-\infty$ si $u_0 < 0$.
4. Les suites géométriques de raison $q \leqslant 1$ divergent et n'ont pas de limite infinies. Par exemple $(-1)^n$ et $(-2)^n$ n'ont aucune limite.
5. Les suites arithmétiques de raison non nulles divergent vers l'infini (le signe dépend du signe de la raison).

1.4. Suites de références, limites

Il faut connaître certaines suites de références et leurs limites.

Proposition 1 | Suite arithmétique

$$\lim_n an+b = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0 \\ b & \text{si} a=0 \text{ (suite constante)} \\ -\infty & \text{si } a<0. \end{cases}.$$

Proposition 2 | Suite factorielle

$$\lim_n n! = +\infty.$$

Proposition 3 | Suite géométrique

$$\lim_n q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q>1 \\ 0 & \text{si } q \in]-1,1[\\ \text{pas de limite si } q<1. \end{cases}.$$

Proposition 4 | Suite puissances

$$\lim_n n^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0 \\ 1 & \text{si } a=0 \text{ (suite constante)} \\ 0 & \text{si } a<0. \end{cases}.$$

Proposition 5 | Suite logarithme

$$\lim_n \ln(n)^b = \begin{cases} +\infty & \text{si } b>0 \\ 1 & \text{si } b=0 \text{ (suite constante)} \\ 0 & \text{si } b<0. \end{cases}.$$

2. EXEMPLES DE SUITES RÉELLES

2.1. Rappel : suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite définie par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le terme r est appelé la **raison** de la suite.

Théorème 1

Le terme général d'une suite arithmétique définie est donné par

$$u_n = u_0 + nr$$

où u_0 est le premier terme de la suite et r est sa raison.

2.2. Suite géométrique

Une suite arithmétique est une suite définie par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = u_n \times r.$$

Le facteur q est appelé la **raison** de la suite.

Théorème 2

Le terme général d'une suite arithmétique définie est donné par

$$u_n = u_0 \times q^n$$

où u_0 est le premier terme de la suite et q est sa raison.

2.3. Suites arithmético-géométriques

Définition 5 | Suite arithmético géométrique

Une suite arithmétique est une suite définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence de la forme

$$\exists a, b \in \mathbf{R}, \forall \mathrm{N} \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

On étudie uniquement les cas où $a \neq 1$ (car alors c'est une suite arithmétique) et $b \neq 0$ (car alors c'est une suite géométrique).

Pour étudier ces suites, on cherche à se ramener à une suite géométrique par l'introduction d'une suite annexe.

Méthode *(Étude d'une suite arithmético-géométrique)*

1. On cherche un point fixe pour la relation de récurrence, c'est à dire un réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$. On obtient en général une formule $\ell = \frac{b}{1-a}$.
2. On introduit la suite annexe $v_n = u_n - \ell$. Elle vérifie la suite de récurrence

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= a(u_n - \ell) + a\ell + b - \ell \\ &= av_n + a\ell + b - \ell \\ &= av_n \text{ car } \ell = a\ell + b. \end{aligned}$$

   (v_n) est donc une suite géométrique de terme général $v_n = v_0 a^n$.
3. Si $v_n = v_0 a^n$, alors

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \ell \\ &= v_0 a^n + \ell \\ &= (u_0 - \ell)a^n + \ell. \end{aligned}$$

4. Il y alors plusieurs comportements possible en fonction de a :
   - convergence vers ℓ si $|a| < 1$,
   - divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ en fonction de u_0 si $a > 1$
   - divergence sans plus de détail si $a < -1$.

Exemple 3 — *Étude de la suite définie par* $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

L'équation $\ell = 0,5\ell + 3$ a pour unique solution $\ell = 6$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 6$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 0,5n$. On reconnaît une suite géométrique de raison $0,5$. Alors $v_n = v_0 0,5^n = -3 \times 0,5^n$ et $u_n = -3 \times 0,5^n + 6$ et u_n converge vers 6.

2.4. Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Définition 6

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite définie par la donnée de ses deux premiers termes et de la la relation

$$\forall n \in \mathrm{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

pour certains réels fixés a et b.

Théorème 3 | Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, résolution

Si (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on peut considérer son polynôme caractéristique

$$P(x) = x^2 - ax - b.$$

Dans deux cas, on peut donner une expression explicite pour u_n. Soit Δ le discriminant de P

1. Si $\Delta > 0$, u_n est de la forme

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où r_1 et r_2 sont les racines de P et λ, μ sont des réels à déterminer en fonction de u_0 et u_1.

2. Si $\Delta = 0$, u_n est de la forme

$$u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

où $r = a$ est l'unique racine de P et λ, μ sont des réels à déterminer en fonction de u_0 et u_1.

Exemple 4 — ***Suite de Fibonacci*** La suite de Fibonacci (F_n) est définie par ses premiers termes $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Le polynôme caractéristique de la suite est $x^2 + x + 1$ et ses racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La suite a pour expression explicite

$$F_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les conditions sur F_0 et F_1 donnent

$$\begin{cases} F_0 = 0 & = \lambda + \mu \\ F_1 = 1 & = \lambda\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Dès lors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

3. THÉORÈMES DE CONVERGENCE

3.1. Rappels sur les suites bornées

Définition 7 | Suite majorées, minorées, bornées

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est :

1. **majorée** si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M.$$
2. **minorée** si
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m.$$
3. **bornée** (u_n) est majorée et minorée.

Remarque 3.1 — Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. (u_n) est bornée,
2. $$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \leqslant u_n \leqslant M,$$
3. $$\exists M \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M,$$
4. $|u_n|$ est majorée.

Notation

Soit (u_n) une suite majorée. Alors l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure et parfois on notera
$$\sup_n u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}.$$
De même si (u_n) est minorée, alors on notera parfois
$$\inf_n u_n = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Théorème 4

Toute suite convergente est bornée.

Exemple 5 — La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+3}{n-5}$ est bornée car elle converge vers 2.

Proposition 6 | Passage à la limite dans les inégalités

1. Soit (u_n) une suite majorée par $M \in \mathbb{R}$. Si u_n converge alors
$$\lim u_n \leqslant M.$$
2. Soit (u_n) une suite minorée par $m \in \mathbb{R}$. Si u_n converge alors
$$\lim u_n \geqslant m.$$

Remarque 3.2 — Attention, en passant à la limite on perd les inégalités strictes. Soit (u_n) une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ et m, M des réels alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < M) \Rightarrow \lim u_n \leqslant M$$

et

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n > m) \Rightarrow \lim u_n \leqslant m.$$

Cela se voit en considérant par exemple la suite définie par $u_n = \frac{1}{2^n}$. En effet quelque soit n, $u_n > 0$, alors qu'à limite on a $\lim u_n = 0$.

3.2. Théorème de la limite monotone

Théorème 5 | Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante et majorée converge (vers sa borne supérieure).

Preuve On commence par remarquer que l'ensemble des valeurs de la suite u, c'est à dire $\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbf{R}$. Il admet donc une borne supérieure. On suppose ensuite par l'absurde que u ne converge pas vers $L = \sup\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$. Cette condition s'écrit

$$\exists \epsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant k, |u_n - L| < \epsilon.$$

Comme u_n est plus petit que L, on obtient qu'il existe une infinité de termes de la suite u_n plus petits que $L - \epsilon$. Comme u_n est croissante, cela impose que pour tout entier n, $u_n < \mathrm{L} - \epsilon$. Donc par passage à la borne sup, $\sup\{u_n, n \in \mathbf{N}\} < \mathrm{L} - \epsilon$ ce qui est absurde.

Exemple 6 — *Exercice d'application* On définit une suite réelle par $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$. Comme pour $t \in [0,1]$, $t^n \leqslant t^{n+1}$, on obtient par les opérations usuelles

$$\frac{1}{1+t^n} \geqslant \frac{1}{1+t^{n+1}}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient que pour tout entier n, $u_{n+1} > u_n$. De plus on vérifie que $u_n < \int_0^1 dt = 1$. Ainsi u est une suite croissante est majorée, donc elle converge.

Corollaire 1

Soit (u_n) une suite croissante alors on a l'alternative

1. (u_n) converge vers un réel ℓ (si la suite est majorée)
2. $\lim_n u_n = +\infty$ (si la suite n'est pas majorée).

Corollaire 2

Soit (u_n) une suite décroissante alors on a l'alternative

1. (u_n) converge vers un réel ℓ (si la suite est minorée)
2. $\lim_n u_n = -\infty$ (si la suite n'est pas minorée).

3.3. Théorème des suites adjacentes

Définition 8 | Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si

1. u_n est croissante,
2. v_n est décroissante,
3. $\lim_n u_n - v_n = 0$.

Théorème 6 | Théorèmes des suites adjacentes

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et elles ont la même limite.

Exemple 7 — Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=2}^{2n} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$$

et

$$v_n = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune.

4. CALCUL DE LIMITES

Proposition 7

Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$\lim_n u_n = \ell \iff \lim_n |u_n - \ell| = 0.$$

Cette remarque nous donne un méthode fondamentales pour prouver qu'une suite converge. Si on a l'intuition que la suite (u_n) converge vers ℓ, on peut calculer la différence $|u_n - \ell|$ et montrer qu'elle tend vers zéro.

Exemple 8 — Montrer que la suite définie par $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{n} + 2$ tend vers 2.

Pour calculer des limites, on peut aussi utiliser des méthodes présentes dans la suite de ce chapitre.

4.1. Opérations sur les limites

Proposition 8 | Sommes de limites

Si on connait les limites de (u_n) et (v_n) , alors on peut parfois déterminer la limite de $(u_n + v_n)$.

$\lim_n u_n + v_n$	$\ell \in \mathbf{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$

Les "?" correspondent à des **formes indéterminées** : sans plus d'information on ne sait pas calculer la limite. On ne sait même pas s'il en existe une!

Proposition 9 | Produit de limites

Si on connait les limites de (u_n) et (v_n), alors on peut parfois déterminer la limite de $u_n \times v_n$.

$\lim_n (u_n \times v_n)$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' < 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Les "?" correspondent à des **formes indéterminées** : sans plus d'information on ne sait pas calculer la limite. On ne sait même pas s'il en existe une!

Proposition 10

Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite qui tend vers 0, alors $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Remarque 4.1 — Du tableau pour les limites des produit, on peut déterminer le tableau pour les quotients en remarquant que $\lim u_n = +\infty \iff \lim \frac{1}{u_n} = 0^+$. ($0^+$ signifie "tend vers 0 par *valeurs positives*.

Proposition 11 | Limite de l'inverse

Si on connait les limites de (u_n) et (v_n), alors on peut parfois déterminer la limite de $\frac{u_n}{v_n}$.

$\lim_n u_n$	0 (sans précision)	0^+	0^-	$\lambda \in \mathbf{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_n \frac{1}{u_n}$	?	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{\lambda}$	0^+	0^-

Proposition 12 | Limite du quotient

$\lim_n (\frac{u_n}{v_n})$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	0	0^+	0^-	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	0	$-\infty$	$+\infty$
0	?	?	?	?	?	?	?
0^+	$-\infty$	$+\infty$	?	?	?	$-\infty$	$+\infty$
0^-	$+\infty$	$-\infty$	?	?	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	0^+	0^-	0	0^-	0^+	?	?
$+\infty$	0^-	0^+	0	0^+	0^-	?	?

Proposition 13 | Compatibilité avec la relation d'ordre

Soient (u_n) et (v_n) suites réelles

1. pour tout $N \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$,
2. (u_n) et (v_n) sont convergentes

Alors

$$\lim_n u_n \leqslant \lim_n v_n.$$

Remarque 4.2 — On peut remplacer l'hypothèse 1 par l'existence de $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n.$$

Remarque 4.3 — Attention, si on remplace l'hypothèse 2 par $u_n < v_n$, on garde une inégalité large $\lim u_n \leqslant \lim v_n$ dans la conclusion. Pas d'inégalité stricte ! Cela se voit en considérant par exemples les suites $u_n = 2$ et $v_n = \frac{1}{n} + 2$.

On a un résultat analogue pour les limites infinies.

Proposition 14

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leqslant v_n$ alors

1. si $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$,
2. si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$.

Théorème 7 | Existence de limites par encadrement

Soient u, v, w des suites réelles telles que

1. pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,
2. u et v admettent une limite commune $\ell \in \mathbf{R}$.

Alors v admet une limite $\lim_{x \to x_0} v_n = \ell$.

Remarque 4.4 — On peut remplacer l'hypothèse 1 par l'existence de $n_0 > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Corollaire 3

Soit (u_n) une suite réelle telle qu'il existe une suite (v_n) positive telle que

1. $\lim v_n = 0$,
2. $|u_n| \leqslant v_n$ (à partir d'un certain rang).

Alors u_n tend vers 0.

4.2. Utilisation des sous suites

Définition 9 | Sous-suite

Une **sous-suite** (ou suite extraite) d'une suite réelle (u_n) est une suite suite de la forme $u_{\phi(n)}$ où ϕ est une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.

Exemple 9 — Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_{2n}) est la suite extraite des termes pairs de la suite : $u_0, u_2, \ldots$.
2. (u_{2n+1}) est la suite extraite des termes impairs de la suite : $u_1, u_3, \ldots$.

Théorème 8

Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la la même limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors (u_n) converge et

$$\lim_n u_n = \ell$$

.

Exemple 10 — Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{12n} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

On a $\lim u_{2n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0$ et $\lim u_{2n+1} = \frac{1}{12n} = 0$ donc u_n converge et

$$\lim u_n = 0.$$

Exemple 11 — Montrer que la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\ln(k)} \text{ converge.}$$

4.3. Indéterminations classiques

Il y a quelques indéterminations que l'on sait lever par des méthodes classiques, on en donne quelques exemples.

Quotient de polynômes. Si u_n et v_n sont deux suites polynomiales, c'est à dire

$$u_n = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_0$$

et

$$v_n = b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \cdots + b_0$$

où m et d sont des entiers positifs et les b_i et a_i sont des réels. On suppose que a_d et b_p sont **non nuls**. On voit que c'est une forme indéterminée car c'est le quotient de deux suites de limites infinies.

Proposition 15

$$\lim_n u_n = \lim_n \frac{a_d n^d}{b_p n^p} = \lim_n \frac{a_d}{b_p} n^{d-p}$$

On a alors plusieurs cas (faciles à retrouver)

1. si $d = p$, $\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_d}{b_p}$,
2. si $d > p$, $\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \epsilon\infty$ où $\epsilon \in \{+, -\}$ est le signe de $\frac{a_d}{b_p}$
3. si $d < p$, $\lim_n \frac{u_n}{v_n} = 0^{(\epsilon)}$ où ϵ est le signe de $\frac{a_d}{b_p}$.

Différences de radicaux. Dans cette partie on regardera la cas d'un exemple, il peut donner des idées pour d'autres. On cherche à déterminer la limite de suite définie par

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Elle est indéterminée car c'est la somme d'une suite de limite $+\infty$ et d'une suite $-\infty$. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Sous cette forme, on voit que u_n converge et

$$\lim_n u_n = 0.$$

4.4. Croissances comparées

On connaît les limites de certains quotients de suites de limites infinies.

Théorème 9 | Croissances comparées

Soit $a, b, q > 0$ des réels strictement positifs, alors

$$\lim_n \frac{n!}{n^a} = +\infty, \quad \lim_n \frac{n^a}{q^n} = +\infty, \quad \lim_n \frac{q^n}{\ln(n)^b} = +\infty.$$

Remarque 4.5 — Cela implique automatiquement

$$\lim_n \frac{n!}{q^n} = \lim_n \frac{n!}{\ln(n)^b} = \lim_n \frac{n^a}{\ln(n)^b} = +\infty.$$

Remarque 4.6 — En résumé, les suites qui tendent le plus vite vers l'infini sont (de la plus rapide à la plus lente).

1. $n!$,
2. n^a (avec $a > 0$: plus a est grand plus elle croit vite)
3. q^n, (avec $q > 0$: plus q est grand plus elle croit vite)
4. $\ln(n)^b$, (avec $b > 0$: plus b est grand plus elle croit vite)