TD 7 - Suites

1. LIMITES DE SUITES

Exercice 1 Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1. $u_n = n + \frac{1}{2^n}$,
2. $v_n = 5\ln(n)^3 - \ln(n)^{-2}$
3. $w_n = 5^{-n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
4. $t_n = 5n^2 - 4n^3$.

Exercice 2 Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes.

1. $u_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \times n^2$,
2. $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times n^2$,
3. $u_n = \sqrt{n}(-2)^n$,
4. $u_n = \sqrt{n}\frac{1}{100000000^n}$,
5. $u_n = \frac{(\frac{5}{7})^n - 5}{5n^2}$,
6. $u_n = \frac{-5n+10}{0{,}5^n}$.

Exercice 3 Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes.

1. $u_n = -n^4 + n^3 - n^2 + n - 1$,
2. $u_n = \frac{5n^2-1}{3n^2+12n}$,
3. $u_n = \frac{5n^2-1}{3n^3+12n}$,
4. $u_n = \frac{-5n^7-1}{3n^2+12n}$,
5. $u_n = \frac{2\times 3^n - 4^n}{7^n - 1}$,
6. $u_n = \frac{\ln(n)^3 - \ln(n)}{-\ln(n)^2+1}$,
7. $u_n = \frac{2(-1)^{n^3+1}}{n+2}$,
8. $u_n = \frac{n!}{3^n}$,
9. $u_n = 3n + 1 + \frac{-3}{n^2+1}$.

2. ÉTUDES DE SUITE

Exercice 4 Les suites suivantes sont elles minorées, majorées, bornées ?

1. la suite u définie par $u_n = n^2 + 1$,
2. la suite v définie par $v_n = \frac{n-1}{n+2}$,
3. la suite w définie par $w_n = \cos(n) - n$.

Exercice 5 Les suites suivantes sont-elles monotones, strictement monotones ? Préciser la nature de la monotonie.

1. la suite u définie par $u_n = n^2 + 1$,
2. la suite v définie par $v_n = (-1)^n$,
3. la suite w définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \frac{w_n}{2}$,
4. la suite x définie par $x_0 = -1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$,
5. la suite y définie par $y_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,
6. la suite z définie par $z_n = \frac{n-1}{n+2}$.

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$
2. Montrer que u_n est croissante.
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout entier n,
$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$
Étudier la suite (monotonie, bornes, convergence).

Exercice 8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout entier n,
$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$
1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Est-elle majorée, minorée ?
3. Conjecturer et démontrer une formule pour u_n.

3. SUITES DE RÉFÉRENCE

Exercice 9 Trouver une expression explicites des suites suivantes :

1. $u_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$,
2. $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = -3u_n + 1$,
3. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} + 2u_n = 1$,
4. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 3u_{n+1} - 2$,

Exercice 10 On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}.$$
1. Si $u_0 = -2$, conjecturer et démontrer le comportement de la suite.
2. Si $u_0 = 3$, montrer que pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. On définit une suite (v_n) par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$
Montrer que v_n et géométrique et en déduire une expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire une expression de u_n.

Exercice 11 En se ramenant à une suite récurrente linéaire d'ordre 2, trouver une formule explicite pour la suite définie par $u_0 = 1$, $u_2 = e$ et pour tout $n \in \mathrm{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

4. SUITES ADJACENTES ET MONOTONES

Exercice 12 Montrer que les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont convergentes vers la même limite.

Exercice 13 Soit a et b deux réels vérifiant $0 < a < n$. Soient (u_n) et (v_n) des suites définies par $u_0 = a \in \mathbf{R}$, $v_0 = b \in \mathbf{R}$ et

$$\forall n \in \mathrm{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_n = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Montrer que les suites u et v convergent vers la même limite.

Exercice 14 Soit H_n la suite définie pour $n \geqslant 1$ par

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que soit H_n converge, soit H_n tend vers $+\infty$,
2. Montrer que quelque soit $n \geqslant 1$, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}$,
3. En déduire que H_n tend vers $+\infty$.

5. EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

Exercice 15 On considère la suite (u_n) définie par$u_0 = 1$et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.

1. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$ Montrer que si $x \in [0,1], alorsf(x) \in [0,1]$. 2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0, un \in [0,1]$.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $]-1;+\infty[$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n).
5. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 16 Soit $a > 0$. On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, u_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \ldots$$

Montrer que $\left(u_n\right)$ est convergente.

Exercice 17

1. Montrer que l'équation $x^3 = 1 - nx$ admet une seule solution sur $[0, +\infty[$ que l'on note x_n.
2. Montrer que la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite ℓ.
4. **(Pour plus tard)** Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 18 Étude de la suite définie par

$$u_n = e^{u_n} - 1, \qquad u_0 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 19 Étude de la suite définie par

$$u_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}, \qquad u_0 = 1.$$

Exercice 20 Soit une suite u croissante telle que u_{2n} converge. Montrer que u_n converge.