TD 9 - Continuité des fonctions

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1

1. Soit $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polynôme du troisième degré. Montrer que $P(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $d > 0$ un réel positif. Montrer que l'équation $x^n - d$ admet au moins une solution.

Exercice 2 Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1;1[$.

Exercice 3 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

*Le réel x_0 est un **point fixe** de f.*

Exercice 4 Soit f la fonction réelle définie par

$$\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = arctan(2x) - arctan(x).$$

Pour tout $c \in \mathbf{R}$, combien a de solution(s) l'équation $f(x) = c$.

Exercice 5 Le samedi, Antonin randonne dans le massif de la Chartreuse. Il part à 14h. Il dort sur place. Le lendemain, Antonin fait le chemin du retour. Il part à 14h. Montrer qu'il existe un point de son chemin de randonnée auquel Antonin arrive à la même heure le samedi et le dimanche.

2. Théorème de la bijection

Exercice 6 Montrer que les fonctions suivantes réalisent une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à déterminer. Expliciter la bijection réciproque

1. $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $f : x \mapsto \ln(x^3 + 1)$,
4. $f : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{x + 1}}$.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. Montrer que f réalise une bijection entre $\mathbf{R}_+$ et un intervalle à préciser.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution. On appelle (u_n) cette unique solution.
4. Étudier les variations de la suite (u_n). Admet-elle une limite ?

3. BORNES ATTEINTES

Exercice 8 On se repère sur l'équateur en utilisant l'angle comme si c'était le cercle unité. On note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ qui a une abscisse sur le cercle unité associe la température en ce point.

1. Montrer que f est périodique et donner sa période.
2. En supposant que la température une fonction continue de l'abscisse, montrer que f admet un minimum et un maximum.
3. Montrer qu'il existe au moins deux points sur l'équateur qui ont la même température.

Exercice 9 Soient $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ continues telles que

$$\forall \in [a, b], f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leqslant g(x) - a.$$

4. RETOUR SUR LES SUITES

Exercice 10 On considèere la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on déefinit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3-3x+1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbf{R}^+$ et que $f(\mathbf{R}^+) \subset \mathbf{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Exercice 11 Soient a et b deux réels strictement positifs ; on définit une suite (u_n) par :

$$u_0 \geqslant 0 \text{ et ;} \quad u_{n+1} = \sqrt{a u_n + b}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle cette suite est stationnaire.
2. Montrer que si u_0 est distinct de cette valeur, (u_n) est monotone et bornée. Trouver $\lim_{n\to\infty} u_n$.