# INF 10 - Systèmes linéaires.

## 1. ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS

On considère un système linéaire mis sous la forme

$$AX = B$$

où $A \in M_n(\mathbf{R})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbf{R})$. L'objectif est de :

- Déterminer si A est inversible,
- Résoudre le système $AX = B$ : trouver X.

On a alors plusieurs choix : on peut soit inverser la matrice A (si elle est inversible), puis calculer $X = A^{-1}B$, soit résoudre uniquement l'équation $AX = B$. Ces deux méthodes ont leurs avantages et leurs inconvénients : inverser une fois A permet de résoudre le système rapidement pour tout valeur de X. Au contraire, si on doit résoudre moins de "$n$" systèmes, il vaut mieux résoudre uniquement l'équation.

**Exercice 1** Coder une fonction `pivot` qui prend entrée une matrice carrée et renvoie la matrice inverse de la matrice.

## 2. LES MÉTHODES DE LA BIBLIOTHÈQUE NUMPY.LINALG

Le pivot de Gauss est déjà implémenté dans les modules de Python. On utilise le module `numpy.linalg`. On l'importe sous l'alias `al` grâce à la commande `import numpy.linalg as al`.

Les méthodes à connaître sont :

- `al.inv`, qui inverse une matrice carrée si c'est possible,
- `al.matrix_power`, qui prend en entrée une matrice et un nombre : `al.matrix_power(M,k)` renvoie la matrice $M^{\ell}$,
- `al.solve` prend en entrée une matrice A et un vecteur $b$ et renvoie l'unique solution si elle existe de $AX = b$. On tapera `al.solve(A,b)`.

**Attention**
La méthode `al.solve` ne fonctionne que pour des matrices **carrées et inversibles**.

**Exercice 2** **Retour sur les matrices.**

Écrire une fonction qui prend en entrée une entier $n$ et crée la matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$(\mathrm{M})_{i,j} = \binom{j}{i}$$

si $i \leqslant j$ et 0 sinon.

**Exercice 3** Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

A l'aide des commandes du module `numpy.linalg`, résoudre les systèmes $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ pour les valeurs de B :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Inverser la matrice A et retrouver les mêmes résultats dans les méthodes de `al`.

**Exercice 4** Avec les méthodes de votre choix, résoudre les systèmes suivante :

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 2 \\ 2x - y - z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ -x + 3z &= 5 \\ x - 3y + z &= 1 \end{cases}$$

**Exercice 5** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Les inverser si possible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6** Soit $(u_n)$ la suite définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

On pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire une fonction qui calcule $u_n$ à l'aide du calcul des puissances de A.
4. Essayer la méthode avec $a$ et $b$ tels qu'on ne connaît pas d'autres méthodes de résolution (pourquoi la condition est-elle $a^2 + 4b < 0$ ?)

**Exercice 7** Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites définies par leurs premiers termes $a_0$ et $b_0$ et les relations de récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} & = 2a_n - b_n \\ b_{n+1} & = -a_n + 2b_n \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire un programme qui prend entrée les conditions initiales et $n$ et renvoie $a_n$ et $b_n$. Le tester sur des exemples.
4. Si $a_{100} = 900$ et $b_{100} = -60$, peut-on trouver $a_0$ et $b_0$ ?