INF 8 - Calcul approché d'intégrales par la méthode des rectangles.

1. THÉORIE ET CONVERGENCE

On a vu dans le cours sur les intégrales qu'on pouvait approximer certaines sommes par des intégrales. Dans ce TP on se restreindra aux méthodes les plus classiques d'intégration numérique : la méthodes des rectangles à gauche et à droite.

Pour rappel, si f est une fonction continue sur $[a,b]$, la méthode des rectangles à gauche consiste à approximer $\int_a^b f(t)dt$ par

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

alors que la méthode des rectangle à droite par

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}).$$

On a vu dans le cours le résultat suivant

Théorème 1 | Méthode des rectangles - Cas C^1

Si f est une fonction de classe C^1, alors les approximations T_n et S_n donnent une valeur approchée de l'intégrale vérifiant

$$\left|\int_a^b f(t)dt - S_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n}\max_{x\in[a,b]} ||f'(x)|.$$

L'approximation est la même pour T_n.
En conséquence, si $\epsilon > 0$, pour avoir une approximation à ϵ près de l'intégrale, il suffit de prendre

$$n = \lfloor \frac{(b-a)^2}{2\epsilon}\max_{x\in[a,b]} |f'(x)|\rfloor + 1$$

Pour une fonction quelconque, la méthode des rectangles fonctionnera aussi, mais la précision de la convergence sera moindre et moins connue. Il y a tout de même des cas particuliers où on garde une information précise :

Théorème 2 | Méthodes des rectangles - cas monotone

1. Si f est une fonction croissante sur $[a,b]$ alors S_n et T_n sont des approximations de $\int_a^b f(t)dt$ à $\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$ près avec
$$\mathrm{S}_n(f) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \mathrm{S}_n(f) + \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$
et
$$\mathrm{T}_n(f) - \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \mathrm{T}_n(f).$$
2. Si f est une fonction croissante sur $[a,b]$ alors S_n et T_n sont des approximations de $\int_a^b f(t)dt$ à $\frac{(b-a)(f(a)-f(b))}{n}$ près avec
$$\mathrm{T}_n(f) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \mathrm{T}_n(f) + \frac{(b-a)(f(a)-f(b))}{n}$$
et
$$\mathrm{S}_n(f) - \frac{(b-a)(f(a)-f(b))}{n} \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \mathrm{S}_n(f).$$
3. Dans les deux cas, si $\epsilon > 0$, pour obtenir une approximation de l'intégrale à ϵ près, il suffit de prendre
$$n = \lfloor \frac{(b-a)|f(b)-f(a)|}{\epsilon} \rfloor + 1.$$

Exemple de code On suppose avoir codé la fonction f auparavant. Le code suivant donne une approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles à gauche.

```
def methode_rectangle(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    I = 0
    for i in range(n):
        x = a + i * h
        I += f(x) * h
    return (I)
```

1. Adapter le code pour qu'il code la méthode des rectangles à droite.
2. Adapter le code pour qu'il prennent en entrée ϵ à la place de n et réalise lui même le calcul de n.

EXERCICES

Exercice 1 Calculer des approximations des intégrales suivantes à 10^{-4} près. Pour celles que vous savez calculer, comparer aux valeurs exactes.

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \qquad \mathrm{K} = \int_0^2 xe^x \qquad \mathrm{L} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Exercice 2 Écrire une fonction Python qui prend en entrée un réel positif ε et renvoie une approximation à ε près de $\arctan(x)$, calculé à partir de la formule

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Sur la même figure, tracer le graphe de la fonction arctan calculé à partir de la commande Numpy et à partir de la fonction que vous avez codée. On fera un tracé entre -5 et 5, avec 200 points. Pour le tracé avec la méthode des rectangles, on prendre $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exercice 3 Écrire une fonction qui donne une approximation à $\varepsilon > 0$ près de

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Sur un même graphique, tracez les termes de la suite $(\mathrm{F}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Que conjecturer ?