Thomas Cometx

CHAPITRE 1

Rappels de terminale. Calculs.

1. MÉTHODES DE CALCUL

1.1. Fractions

Théorème 1

Tout nombre rationnel s'écrit d'une façon unique $\frac{p}{q}$ avec des entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$ non nul qui sont premiers entre eux (c'est à dire qu'ils ont 1 pour unique diviseur commun).

Méthode *(Règles de calcul)*

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
2. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
4. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Remarque 1.1 — On prend l'habitude de toujours simplifier les fractions : on chercher à les représenter comme une fraction irréductible. Par exemple, on n'écrira jamais $\frac{5}{20}$ dans le résultat d'un calcul mais $\frac{1}{4}$.

Attention

Il ne faut jamais écrire $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Exemple 1 — Calculer :

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{4}, \quad \frac{11}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}, \quad \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{4}{3} : \frac{3}{2}.$$

1.2. Puissances (entières)

Définition 1 | Puissances d'un nombre réels

Si x est un réel et n un entier positif, on définit x^n comme le produit de n facteurs x :

$$x^n = x \times \cdots \times x \text{ où } x \text{ est répété } n \text{ fois}.$$

Par convention $x^0 = 1$.
Si $x \neq 0$, on peut aussi définir x^n pour n un entier négatif par

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}.$$

Méthode *(Règles de calcul)*

Soient x, y des réels et n, p des entiers relatifs. On a les règles de calcul suivantes

1. $(x \times y)^n = x^n \times y^n$
2. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
3. $x^{n+p} = x^n \times x^p$
4. $(x^n)^p = x^{np}$
5. $\frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$.

Attention

Il ne faut jamais écrire $(x+y)^n = x^n + y^n$.

Attention

Attention à ne pas confondre $(-a)^n et - a^n$. Par exemple :

1. $-1^n = -1$
2. $(-1)^n = 1$ si n est pair et -1 si n est impair
3. pour éviter les erreurs, on peut écrire immédiatement $(-a)^n = (-1)^n a^n$.

Exemple 2 — Calculer

1. $3^4 \times 6^4$,
2. $\frac{2^8}{2^{-6}}$,
3. $\frac{(x^2y^3)^{-2}}{(xy^2)^3}$.

1.3. Racines carrées, cubique

Définition 2 | Racine carrée

Soit $x \in \mathbf{R}_+$ un réel positif, il existe un unique réel positif y tel que $y^2 = x$. On le note $\sqrt{x}$ (ou $x^{1/2}$) et il s'appelle **la racine carrée de x.**

Remarque 1.2 — On ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif.

Remarque 1.3 — On a toujours $(\sqrt{x})^2 = x$ mais pas toujours $\sqrt{x^2} = x$.

Méthode *(Règles de calculs)*

Pour tout réels positifs $x, y \in \mathbf{R}_+^2$, on a

- $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$,
- $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ si $y > 0$,
- $(\sqrt{x})^2 = x$.

Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

On essaye toujours de simplifier les expressions avec les racines carrées. Par exemples on ne laissera jamais $\sqrt{4}$ dans un calcul mais on mettra 2. Aussi, on dans une écriture fractionnaire, on évite de laisser des racines au dénominateur.

Méthode *(Quantité conjuguée)*

Quand on a une expression fractionnaire avec une racine carrée au dénominateur comme $3 + \sqrt{2}$, on multiplie par la **quantité conjuguée** $3 - \sqrt{2}$ au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{4}{3+\sqrt{2}} &= \frac{4}{3+\sqrt{2}}\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\\ &= \frac{12-4\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}\\ &= \frac{12-4\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2}\\ &= \frac{12-4\sqrt{2}}{7}.\end{aligned}$$

Attention

On n'écrira jamais $\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Exemple 3 — Mettre les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ ou $a\sqrt{b}+c$, sans racine au dénominateur, avec a, b, c des nombres rationnels.

$$\sqrt{108}, 6\sqrt{45}, \frac{12}{\sqrt{56}}, \frac{2}{1-\sqrt{7}}.$$

Définition 3 | Racine cubique

Soit $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique réel y tel que $y^3 = x$. On note ce réel $\sqrt[3]{x}$ ou $x^{1/3}$ et on l'appelle **racine cubique de** x

Méthode *(Règles de calcul)*

Pour tout réels $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on a

- $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$,
- $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$ si $\neq 0$,
- $\sqrt[3]{x}^3 = x$,
- $\sqrt[3]{x^3} = x$.

2. POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Un trinôme du second degré est une fonction de la forme

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$. Ces fonctions ont été étudiées aux lycée et ici on donne un petit résumé de ce qu'il y a à savoir.

2.1. Variations et signe

Théorème 2 | Forme canonique

Un polynôme du second degré se met sous la forme

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2},\right]$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** du polynôme.

Théorème 3 | Résolution de $f(x) = 0$

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. On souhaite résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans $\mathbb{R}$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Ses solutions sont :

1. si $\Delta = 0$, une unique solution réelle $r = \frac{-b}{2a}$
2. si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

3. si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions réelles.

Vocabulaire

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ s'appellent les **racines** du polynôme f.

On connait les tableaux de variations et de signe des trinômes du second degré.

Théorème 4 | Tableaux de variations

Cas $a < 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x) = 2ax + b$		$+$	0	$-$	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\searrow$	$-\infty$

Cas $a > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x) = 2ax + b$		$-$	0	$+$	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\nearrow$	$+\infty$

Théorème 5 | Tableau de signes

Cas $\Delta > 0$.

x	$-\infty$		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

Cas $\Delta = 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

Cas $\Delta < 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		signe de a	

Exemple 4 — Faire l'étude complète (forme canonique, racines, variation, signe, extremum) des polynômes suivants :

1. $P(x) = 5x^2 + 4x - 12$,
2. $Q(x) = 4x^2 - 16x + 3$,
3. $R(x) = -x^2 + 6x - 9$.

2.2. Autres remarques

Relations coefficients racines. Pour trouver plus rapidement les racines d'un polynôme, on peut utiliser les relations coefficient racines. Dans cette partie on les donne pour des polynômes de degré 2, on fera un peu plus par la suite.

Théorème 6 | Relations coefficients racines

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré de discriminant strictement positif, avec pour racines r_1 et r_2, alors les sommes et produits des racines sont donnés par

$$S = r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } P = r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Exemple 5 — Soient r_1 et r_2 les racines de $x^2 - x - 1$. Sans calculer explicitement r_1 et r_2, calculer $\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}$.

Factorisation. Dans la suite de l'année, on étudiera des polynômes généraux donc pas forcément de degré 2, et trouver leurs racines. Par exemple, prenons le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. On remarque assez rapidement que $P(1) = 0$. On va donc chercher à écrire le polynôme $P(x) = (x-1) \times Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2. Donc en fait on cherche des réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre a, b, c solutions du système

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b - a & = -1 \\ c - b & = 1 \\ -c & = -1 \end{cases}$$

ce qui donne $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$ donc

$$P(x) = (x-1)(x^2+1).$$

Ainsi $P(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

Remarque 2.1 — Cette méthode se généralise à des polynôme de tout degré. Cela sera fait dans un chapitre ultérieur.

Exemple 6 — Trouver les racines de du polynôme $P(x) = 2x^3 - 14x + 12$.

3. RAPPELS SUR LES SUITES

On rappelle qu'une suite est une application (u_n) qui a tout entier n associe un réel u_n.

3.1. Rappel : suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite définie par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le terme r est appelé la **raison** de la suite.

Théorème 7

Le terme général d'une suite arithmétique est donné par

$$u_n = u_0 + nr$$

où u_0 est le premier terme de la suite et r est sa raison.

Remarque 3.1 — Une suite arithmétique de raison différente de zéro est toujours divergente, soit vers $-\infty$ soit vers $+\infty$ en fonction du signe de la raison.

3.2. Rappel : suites géométriques

Une suite géométrique est une suite définie par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le facteur q est appelé la **raison** de la suite.

Théorème 8

Le terme général d'une suite géométrique est donné par

$$u_n = u_0 \times q^n$$

où u_0 est le premier terme de la suite et q est sa raison.

3.3. Bienvenue en prépa : les suites arithmético-géométriques

Définition 4 | Suite arithmético-géométrique

Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont des réels. On étudie uniquement les cas où $a \neq 1$ (car alors c'est une suite arithmétique) et $b \neq 0$ (car alors c'est une suite géométrique).

Pour étudier ces suites, on cherche à se ramener à une suite géométrique par l'introduction d'une suite annexe.

Méthode ***(Étude d'une suite arithmético-géométrique)***

1. On cherche un point fixe pour la relation de récurrence, c'est à dire un réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$. On obtient en général une formule $\ell = \frac{b}{1-a}$.
2. On introduit la suite annexe $v_n = u_n - \ell$. Elle vérifie la suite de récurrence

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= a(u_n - \ell) + a\ell + b - \ell \\ &= av_n + a\ell + b - \ell \\ &= av_n \text{ car } \ell = a\ell + b. \end{aligned}$$

   (v_n) est donc une suite géométrique de terme général $v_n = v_0 a^n$.
3. Si $v_n = v_0 a^n$, alors

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \ell \\ &= v_0 a^n + \ell \\ &= (u_0 - \ell)a^n + \ell. \end{aligned}$$

4. Il y alors plusieurs comportements possible en fonction de a :
   - convergence vers ℓ si $|a| < 1$,
   - divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ en fonction de u_0 si $a > 1$
   - divergence sans plus de détail si $a < -1$.

Exemple 7 — *Étude de la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.*

L'équation $\ell = 0,5\ell + 3$ a pour unique solution $\ell = 6$. Soit (v_n) la suite définie par

$v_n = u_n - 6$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 0,5n$. On reconnaît une suite géométrique de raison $0,5$. Alors $v_n = v_0 \times 0,5^n = -3 \times 0,5^n$ et $u_n = -3 \times 0,5^n + 6$ et u_n converge vers 6.

4. EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Définition 5 | Exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$. On note aussi $\exp(x) = e^x$.

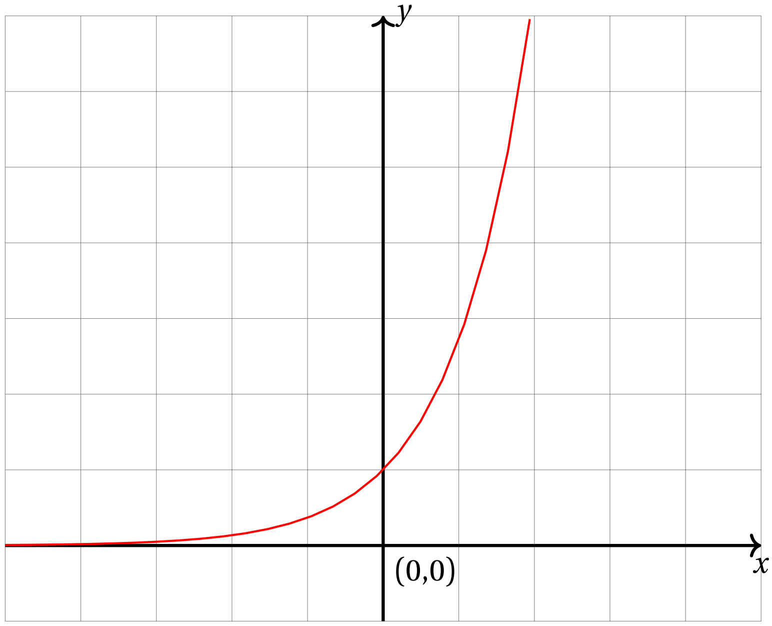
Proposition 1

Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

- $\exp(x) > 0$,
- $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
- $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$,
- $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
- la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

Représentation graphique.



Exemple 8 — Résoudre l'équation

$$e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0.$$

Définition 6 | Logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien**, notée ln la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ vers $\mathbf{R}$.

Remarque 4.1 — Le fait que exp et ln soient bijections réciproques se traduit par les égalités suivantes

$$\forall x \in]0, +\infty[, \exp(\ln(x)) = x$$

et

$$\forall x' \in \mathbf{R}, \ln(\exp(x)).$$

On notera l'importance de la présence de x dans le domaine de la **première fonction à appliquer**.

Remarque 4.2 — Une autre définition de la fonction logarithme est

$$\ln(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt.$$

Proposition 2

- $\ln(1) = 0$,
- $\ln(e) = 1$,
- $\forall (x, y) \in]0, +\infty[, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$,
- $\lim_{x\to 0} \ln x) = -\infty$,
- $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

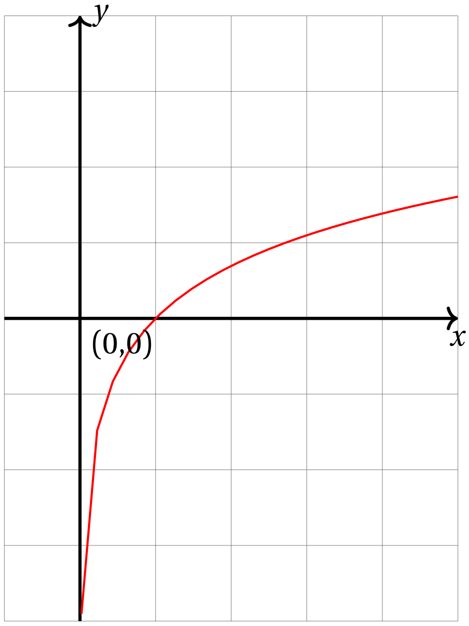
Proposition 3

Le logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

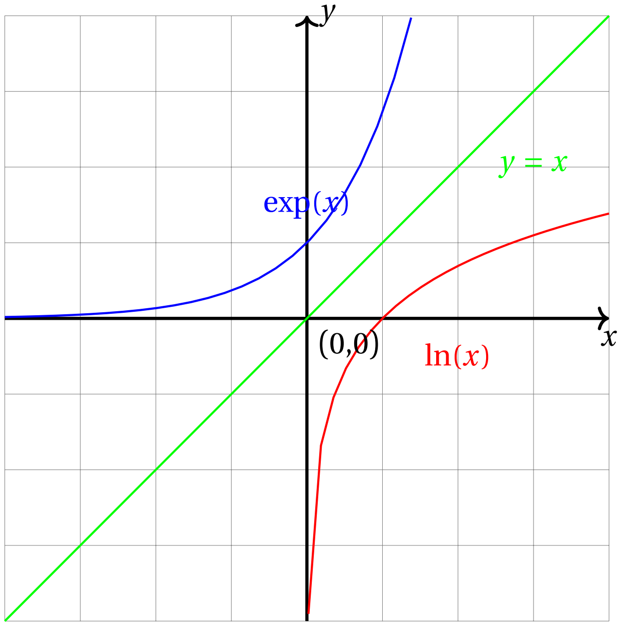
Représentation graphique.



Exemple 9 — Résoudre l'équation

$$2\ln(x) - \ln(3x) = 12.$$

Remarque 4.3 — Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre. Cela implique que leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la diagonale d'équation $y = x$.


y
y = x
exp(x)
(0,0)
ln(x)
x