CHAPITRE 10

Systèmes linéaires

Dans tout le chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls.

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Système linéaire

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Un système linéaire de n équations à p inconnues (ou un système linéaire $n \times p$) est un système d'équations de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \quad (L_2) \\ \dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

Les $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des réels données et les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont les inconnues. On peut donner des noms (L_i) à chacune des équations (lignes) du système.

Vocabulaire

1. Si $n = p$ on dit que le système est carré (d'ordre n ou de dimension n).
2. Le n-uplet $b = (b_1, \dots, b_n)$ est appelé **le second membre** de l'équation.
3. Si $b = 0$, alors on dit que le système n'a pas de second membre, ou qu'il est **homogène**.
4. Si deux systèmes (S) et (S′) ont les mêmes solutions, on dit qu'ils sont équivalents et on note

$$(S) \sim (S') \text{ ou } (S) \iff (S').$$

5. Une solution du système est un $p-uplet$ $(x_1, \dots, x_p)$ qui vérifie toutes les équations. Ainsi l'ensemble des solutions d'un système est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$.

6. Si un système n'a pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**.

Définition 2 | Système homogène associé

Soit (S) un système linéaire non homogène. Alors si (S) est

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \quad (L_2) \\ \dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \quad (L_n) \end{cases},$$

le système homogène associé est

$$(S_h)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = 0 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = 0 \quad (L_2) \\ \dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = 0 \quad (L_n) \end{cases}.$$

Théorème 1

Un système linéaire homogène admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Théorème 2

Si $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont des solutions d'un système homogène (S_h) et si $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

1. $(0, \dots, 0)$ est toujours solution de (S_h).
2. $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ est aussi solution de (S_h).
3. $(\lambda x_1, \dots \lambda x_n)$ est une solution de (S_h).

On dit que l'ensemble des solutions de (S_h) est un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Théorème 3

Un système linéaire non homogène admet 0, 1 ou une infinité de solution.

Proposition 1

Si (S) admet une solution $(x_1, \dots, x_n)$, alors toute solution de (S) s'écrit

$$(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \text{ où}$$

$(h_1, \dots, h_n)$ est une solution du système homogène associé (S_h).
Ainsi si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont des solutions de (S), alors

$$(x_1 - y_n, \dots, x_n - y_n) \text{ est une solution de } (S_h).$$

2. PIVOT DE GAUSS

2.1. Systèmes échelonnés (ou triangulaires)

Définition 3

Un système est dit échelonné (ou triangulaire) si dès que $j > i$, $a_{i,j} = 0$. Autrement dit il est sous la forme

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \quad (L_1) \\ \qquad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \quad (L_2) \\ \cdots\cdots & \\ \qquad\qquad a_{n,n}x_n & = b_n \quad (L_n) \end{cases}.$$

Pour un système triangulaire, on résout (si possible) les équations de proche en proche de bas en haut!

Exemple 1 —

2.2. Opérations élémentaires sur les systèmes

Il existe quelques opérations simples qui permettent de transformer un système en système équivalent plus facile à résoudre. L'objectif sera de transformer un système en système triangulaire.

Théorème 4

Les opérations suivantes transforment un système en un système équivalent.

1. $L_i \leftrightarrow L_j$: on échange deux lignes.
2. $L_i \leftarrow aL_i$ avec $a \neq 0$: on multiplie une ligne par un réel non nul.
3. $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ (avec $i \neq j$ et $b \in \mathbb{R}$) : on rajoute ou on soustrait à la ligne L_i un multiple de la ligne L_j.

Les deux dernières opérations peuvent se faire en même temps, on fait alors

$$L_i \leftarrow aL_i + bL_j \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } j \neq i.$$

Vocabulaire

Ces opérations s'appellent **opérations élémentaires sur les lignes** du systèmes.

Remarque 2.1 — Cela montre que si on a deux lignes identiques ou proportionnelles on peut en supprimer une : si $L_j = \lambda L_i$ alors l'opération

$$L_j \leftarrow L_j - \lambda L_i$$

annule la ligne L_j.

Le but de ces opérations est de simplifier le système en supprimant des inconnues sur beaucoup de lignes.

Exemple 2 —

$$(S) \sim \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z=3 & & L_1 \\ 2x+y+z=4 & & L_2 \\ x-y+2z=0 & & L_3 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z=3 & & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 3x+2y=7 & & L_2 \longleftarrow L_1+L_2 \\ 3x+y=6 & & L_3 \longleftarrow 2L_1+L_3 \end{array}\right.$$

Remarque 2.2 — La ligne que l'on soustrait ou ajoute aux autres s'appelle la **ligne pivot.**

Remarque 2.3 — On a le droit de faire simultanément les opérations

$$L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + \mu L_1,$$

Mais on n'aurait pas le droit si le résultat de la première opération changeait celui de la deuxième, comme dans

$$L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + \mu L_2.$$

2.3. Algorithme du pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss combine ce que l'on a vu précédemment à propos de :

- la résolution de systèmes triangulaires (ou échelonnés)
- l'élimination d'inconnues par opérations élémentaires.

Méthode *(Algorithme du pivot de Gauss)*

1. En appliquant successivement des opérations élémentaires pour éliminer des inconnues, transforme le système en un système échelonné équivalent.
2. On résout le système échelonné inconnue par inconnue.

Le mieux est de voir l'algorithme appliqué sur un exemple !

Exemple 3 — ***Exemple de pivot de Gauss*** Résolvons le système

$$(S)\left\{\begin{array}{rl} x+y-\ z=3 & L_1 \\ -x+y+\ z=4 & L_2 \\ x-y+2z=1 & L_3 \end{array}\right. .$$

Par opérations élémentaires on obtient :

$$\begin{aligned}(S) &\iff \left\{\begin{array}{rl} x+y-\ z=3 & L_1 \\ -x+y+\ z=4 & L_2 \\ x-y+2z=1 & L_3 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rl} x+\ y-\ z=3 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 2y\qquad=7 & L_2 \longleftarrow L_1+L_2 \\ -2y+3z=-2 & L_3 \longleftarrow L_3-L_1 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rl} x+\ y-\ z=3 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 2y\qquad=7 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ -3z=5 & L_3 \longleftarrow L_3+L_2 \end{array}\right. .\end{aligned}$$

On a obtenu un système échelonné **de rang 3** qui se résout de proche en proche : $z=\frac{5}{3}$ puis $y=\frac{7}{2}$. On trouve ensuite

$$x=3+z-y=3+\frac{5}{3}-\frac{7}{2}=\frac{18+10-21}{6}=\frac{7}{6}.$$

Il y a donc une unique solution : $(\frac{7}{6},\frac{7}{2},\frac{5}{3})$.

3. COMMENT SAVOIR DANS QUEL CAS ON SE TROUVE ? COMMENT PRÉSENTER LES SOLUTIONS ?

3.1. Cas 1.

La première remarque est que si $n > p$, on a plus d'équations que d'inconnues. Soit le système sera incompatible, soit on va pouvoir éliminer (par pivot de Gauss) **au moins autant d'équation qu'il faut pour revenir à un système carré.** On se place désormais dans ce cas là.

3.2. Cas 2

On peut être dans le cas de la solution unique que si $n = p$, sinon on n'aura pas assez de contraintes. Regardons les trois cas qu'il est possible d'obtenir.

Cas avec aucune solution. Regardons le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rl} x+\ \ y-z=3 & L_1 \\ -x+\ \ y+z=4 & L_2 \\ -x+5y+z=7 & L_3 \end{array}\right. .$$

Le pivot de Gauss donne :

$$\begin{aligned}(S) &\iff \left\{\begin{array}{rl} x+\ \ y-z=3 & L_1 \\ -x+\ \ y+z=4 & L_2 \\ -x+5y+z=7 & L_3 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rl} x+\ \ y-z=3 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 2y\qquad =7 & L_2 \longleftarrow L_1+L_2 \\ 6y\qquad =10 & L_3 \longleftarrow L_1+L_3 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rl} x+y-z=3 & L_1 \\ y\qquad =\frac{7}{2} & L_2 \\ y\qquad =\frac{10}{6} & L_3 \end{array}\right. .\end{aligned}$$

Les lignes L_2 et L_3 sont incompatibles, donc il n'y a pas de solution.

Cas avec une unique solution. On peut reprendre l'exemple déjà traité, c'est quand $n = p$ et que le pivot de Gauss donne un système échelonné. On dit alors qu'on obtient une unique solution $(x_1, \dots, x_p)$ avec les valeurs trouvées.

Cas avec une infinité de solution. On prend un système très proches, mais avec un second membre légèrement différent.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rl} x + y - z = 3 & L_1 \\ -x + y + z = 4 & L_2 \\ -x + 5y + z = 18 & L_3 \end{array} \right. .$$

Le pivot de Gauss donne :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \left\{ \begin{array}{rl} x + y - z = 3 & L_1 \\ -x + y + z = 4 & L_2 \\ -x + 5y + z = 18 & L_3 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lll} x + y - z = 3 & & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 2y & = 7 & L_2 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ 6y & = 21 & L_3 \longleftarrow L_1 + L_3 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ll} x + y - z = 3 & L_1 \\ y \quad = \frac{7}{2} & L_2 \\ y \quad = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} & L_3 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ll} x + y - z = 3 & L_1 \\ y \quad = \frac{7}{2} & L_2 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ll} x \quad - z = -\frac{1}{2} & L_1 \\ \; y \quad = \frac{7}{2} & L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On a "gagné" un degré de liberté : on a seulement deux équations indépendantes pour trois inconnues. Si y est fixé, on voit qu'on peut fixer z ou x et que l'autre viendra de lui même. Ici on obtient un ensemble de solutions à **un paramètre**. Pour savoir combien de paramètre on aura, on calcule la quantité $p - r$ où p est le nombre d'inconnues et r le nombre d'équations indépendantes restantes à la fin.

Ici on peut dire que l'ensemble des solutions est

$$\{(z - \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

Mais en prenant x comme paramètre libre on aurait eu

$$\{(x, \frac{7}{2}, x + \frac{1}{2}), x \in \mathbb{R}\}.$$

Pas de souci, ces ensembles sont les mêmes !

Vocabulaire

Le nombre d'équations indépendantes est appelé le **rang du système.** Celui-ci ce se lit dans un système échelonné équivalent : on est sur de l'avoir obtenu quand on a trouvé un système triangulaire avec des coefficients **non nuls** sur la diagonale.

Si on le note r, le nombre de de paramètre de l'ensemble des solutions sera $p - r$.

4. INTERPRÉTATION MATRICIELLE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Soit (S) un système linéaire $n \times p$ avec les notations habituelles. On introduit les matrices rectangle et colonnes suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si on transforme les inconnues en un vecteur

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},$$

alors le système se réécrit comme l'unique équation matricielle.

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}.$$

4.1. Reformulation des différents cas

Pour les systèmes homogènes. Le cas du système homogène se présente quand le vecteur B est le vecteur nul. Le système s'écrit alors

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où l'inconnue est le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Il a toujours au moins une solution, c'est le vecteur nul. L'autre alternative est qu'il y ait une infinité de solution. C'est **toujours le cas** si $n > p$.

L'ensemble des solutions est un **sous espace vectoriel** de $M_{p,1}(\mathbf{R})$ c'est à dire que

- le vecteur nul est solution
- si X_1, X_2 sont des solutions et si λ est un réel, alors $X_1 + \lambda X_2$ est aussi une solution.

Pour les systèmes non homogènes. C'est le cas général, où B est un vecteur non nul (c'est à dire qu'il a au moins un coefficient non nul).

1. Si le système homogène associé a la solution nulle comme unique solution, alors le système a soit une unique solution, soit aucune.
2. Si le système homogène associé a une infinité de solution, alors on a l'alternative :
   - si le système a au moins une solution X_0, alors l'ensemble de ses solutions est

     $$\{X_0 + H,\ \text{où } AH = 0 \text{ c'est à dire que H est une solution de l'équation homogène.}\}$$

     On a alors une infinité de solution.
   - Autre cas, le système n'a aucune solution.

4.2. Inversion de matrice et système linéaire

Théorème 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbf{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est inversible.
2. Pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = B$ a une unique solution dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, le système

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \quad (L_2) \\ \ldots\ldots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

   a une unique solution dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas là, la solution est donnée par le vecteur

$$X = A^{-1}B.$$

Ce théorème à une application directe, le calcul de l'inverse d'une matrice par le pivot de Gauss.

Méthode *(Inverser une matrice par pivot de Gauss)*

La méthode passe par la résolution simultanée des équations

$$AX = e_i$$

où e_i est le vecteur colonne qui vaut 1 à la i-ème ligne et 0 ailleurs.

Étape 1. On écrit la matrice A à coté de la matrice identité.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \vdots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A pour la transformée en une matrice triangulaire supérieure. On effectue en même temps les mêmes opérations sur la matrice identité à droite.

Si cette opération échoue, c'est à dire qu'on obtient un coefficient diagonal nul, alors on peut conclure que la matrice n'est pas inversible

Si l'opération a réussi, la matrice est inversible : en effet, le système carré se ramène à un système triangulaire supérieur avec des coefficients diagonaux non nuls : il y aura une unique solution. Il ne reste plus qu'à faire quelques calculs pour trouver l'inverse.

Étape 2. Si on n'a pas échangé de ligne et qu'on a "éliminé les inconnues" de la gauche vers la droite (ce qui est conseillé), alors la matrice obtenue à gauche des triangulaire supérieure, et celle obtenue à droite est triangulaire inférieure. Désormais on va faire des **opérations élémentaires sur les lignes** pour transformer la matrice de gauche en matrice diagonale. On commence dans l'autre sens en éliminant d'abord les coefficients dans la colonne de droite, puis on se décale vers la gauche. On fait à chaque fois les mêmes opérations sur la matrice de droite.

Étape 3. La matrice maintenant obtenue à gauche est diagonale à coefficients non nuls. On fait des opérations de multiplications sur les lignes pour la rendre égale à I_n. On fait les même à droite. La matrice obtenue à droite est A^{-1}.

Exemple 4 —

1. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.
Étape 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opération : $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{2}L_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -9 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On a obtenu une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, on peut en déduire que la matrice est inversible.
Étape 2. On repart du haut vers le bas. Opérations : $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_1 - 2L_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -17 & 5 & 2 \\ 16 & -4 & -2 \\ -9 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On a fini, on a une matrice diagonale. On n'a pas à faire d'étape supplémentaire car le coefficient rouge est égal à 0. Sinon il faudrait faire une opération du type $L_1 \leftarrow L_1 + \alpha L_2$.
Étape 3. Il nous reste les opérations de normalisation : $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$, $L_3 \leftarrow -2L_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -17 & 5 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 5 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.1 — Dans le cours on a volontairement choisi une matrice qui avoir une inverse à coefficient entier. En toute généralité, une matrice a coefficient entier a très rarement une inverse à coefficients entiers.

2. Montrer que la matrice B n'est pas inversible où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Essayons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opération : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a bien échelonné la matrice B, et elle contient un coefficient diagonal nul. On peut en déduire qu'elle n'est pas inversible.

Théorème 6

La méthode d'inversion d'une matrice carrée par pivot de Gauss réussit si et seulement si la matrice est inversible. Auquel cas la matrice obtenue à droite est A^{-1}.

Remarque 4.2 — Un pivot de Gauss peut aussi être fait sur une matrice rectangulaire, il sert alors à déterminer le **rang de la matrice**. Nous verrons cela au prochain semestre !