CHAPITRE 12

Fonctions dérivables

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$.

1. FONCTION DÉRIVABLE EN UN POINT

Définition 1 | Fonction dérivable en un point

Soit f une fonction sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$. On dit que f est dérivable en $x \in \mathrm{I}$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe .}$$

La limite s'appelle alors **nombre dérivé de f en x et se note $f'(x)$**

Remarque 1.1 — On peut aussi calculer $f'(x)$ par la formule

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarque 1.2 — L'existence de cette limite sous-entend que que les quantités

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \text{ et } \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-t)}{t}$$

existent et sont égales. Ces quantités s'appellent respectivement les nombres dérivées à droite et à gauche de la fonction f. Si elles existent on dit que f est dérivable à gauche en x (respectivement f est dérivable à droite en x). On note, si les quantités existent :

$$f'_d(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \text{ et } f'_g(x)(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-t)}{t}.$$

Proposition 1

f est dérivable en x si et seulement f est dérivable à gauche et à droite en x avec $f'_d(x) = f'_g(x)$.

Exemple 1 — La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 alors qu'elle est dérivable à droite et à gauche. Cependant on a $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

Remarque 1.3 — Si $\mathrm{I} = [a, b]$ et si x est une borne de l'intervalle, il suffit de montrer la dérivée d'un seul côté !

Théorème 1

Si f est dérivable en x alors f est continue en x.

Attention

Le contraire est faux ! Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable.

2. FONCTION DÉRIVABLE SUR UN INTERVALLE

Définition 2 | Fonction dérivée

Soit f une fonction sur un intervalle I. Si f est dérivable en x pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors ont dit que f est **dérivable sur I**. On peut alors définir une fonction sur I, notée f' et appelée **fonction dérivée** de f, par

$$f : x \in \mathrm{I} \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

C'est simplement la fonction qui à un réel de I associe le nombre dérivée de f en ce point.

Notation

L'ensemble des fonctions dérivable sur I se note $\mathrm{D}(\mathrm{I})$. On note $f \in \mathrm{D}(\mathrm{I})$.

Il est intéressant de s'intéresser à la régularité de cette fonction dérivée.

Définition 3 | Fonction de classe C^1

Une fonction f dérivable sur I est **une fonction de classe** C^1 si f' est continue sur I.

Notation

On note $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$.

Remarque 2.1 —

1. Une fonction de classe C^1 est toujours dérivable, mais le contraire n'est pas vrai. Pour s'en convaincre, on peut prendre une fonction non dérivable que l'on connait déjà et trouver une primitive.
2. On a ainsi

$$\mathrm{C}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{D}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$$

et ces inclusions sont strictes.

3. CALCUL DE DÉRIVÉES

3.1. Dérivées usuelles

D_f	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbf{R}$	$c \in \mathbf{R}$	0
$\mathbf{R}$	x^n pour $n \in \mathbf{N}$	nx^{n-1}
$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$	$-nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$]0, +\infty[$	x^α pour $\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbf{R}$	$\exp(x)$	$\exp(x)$
$]0, +\infty[$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\mathbf{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathbf{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathbf{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$
$\mathbf{R}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Remarque 3.1 — La dérivée de la fonction Arctangente sera démontrée un peu plus tard dans ce chapitre.

3.2. Opérations sur les dérivées

Proposition 2 | Opérations sur les dérivées - 1

Soient f et g deux fonctions dérivables en x, alors
1. $f+g$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$,
2. fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$.

Proposition 3 | Opérations sur les dérivées - 2

Soient f et g deux fonctions dérivables en x avec $g(x) \neq 0$, alors
1. $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et $(\frac{1}{g})'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$,
2. $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$.

Théorème 2 | Dérivée d'une fonction composée

Si f est une fonction dérivable en x et g une fonction dérivable en $f(x)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x et

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x)).$$

Exemple 2 — Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})$. Que remarque-t-on ?

On en déduit une formule pour la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction réciproque.

Théorème 3

Soit f une fonction dérivable réalise qui une bijection entre un intervalle I et un intervalle J. Soit $x\in \mathrm{J}$, si $f'(f^{-1}(x))\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

C'est par exemple le cas d'une fonction de classe C^1 dont la dérivé ne s'annule pas.

Exemple 3 — En utilisant le dernier théorème, montrer que la fonction racine cubique est dérivable en tout réel non nul x. On a des résultats qui fonctionnent aussi pour la régularité supérieure.

Théorème 4

Soient f et g deux fonctions (sur un intervalle I) de classe C^1. Alors,
1. $f+g\in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$,

2. $fg \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$,
3. si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g} \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$, et $\frac{1}{g} \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$,
4. si $g \in \mathrm{C}^1(\mathrm{J})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, alors $g \circ f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$.
5. si f réalise une bijection entre deux intervalles I et J et que $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas sur J, alors $f^{-1} \in \mathrm{C}^1(\mathrm{J})$.

4. THÉORÈMES DE ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

4.1. Théorème de Rolle

Si on trace la courbe d'une fonction dérivable entre deux points du plan, avec la même ordonnée au départ et à l'arrivée, on remarque que la courbe admet toujours une tangente horizontale en un certain point. Le théorème suivant permet de formaliser cette remarque.

Théorème 5 | Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et qui vérifie $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ telle que $f'(c) = 0$.

Corollaire 1

Soit P un polynôme avec n racines réelles, alors le polynôme P′ admet au moins $n-1$ racines réelles.

4.2. Accroissements finis

Si $f(a) \neq f(b)$, on peut quand même obtenir un résultat. C'est une conséquence du théorème de Rolle.

Théorème 6 | Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Théorème 7 | Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. On suppose que f' est bornée sur $]a, b[$. Alors

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|.$$

Application à l'étude des suites récurrentes. Dans cette petite partie, on considère une suite récurrente d'ordre 1 définie par u_0 et la relation

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$.

Proposition 4

Si $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leqslant 1$, alors (u_n) est bien définie (car $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in \mathrm{I}$).

Proposition 5

Si de plus, u_n est croissante ou décroissante (par exemple $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \leqslant x$ ou $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \geqslant x$), alors (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.

5. LIEN AVEC LA MONOTONIE

Théorème 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, alors
1. f est constante sur I $\iff \forall x \in \mathrm{I}, f'(x) = 0$,
2. f est croissante sur I $\iff \forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \geqslant 0$,
3. f est décroissante sur I $\iff \forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \leqslant 0$,
4. $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I,
5. $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I,

Remarque 5.1 — La réciproque du 4. est fausse. Si on prend $f : x \mapsto x^3$, c'est bien une fonction strictement croissante alors que $f'(0) = 0$. Il en est de même pour 5. Il faut être plus précis pour obtenir une réciproque.

Proposition 6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$.
1. si $f' \geqslant 0$ sur I et si f est non nulle sur I sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante,

2. si $f' \leqslant 0$ sur I et si f est non nulle sur I sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante,

6. THÉORÈME DU PROLONGEMENT DÉRIVABLE

Il arrive souvent qu'une fonction soit clairement dérivable, par les théorèmes généraux, partout sur un intervalle sauf en quelques points. Le théorème suivant permet de traiter une certaine partie de ces cas.

Théorème 9 | Théorème du prolongement de la dérivée

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $\mathrm{I}\backslash\{a\}$ avec $a \in \mathrm{I}$. Si f est continue en a et si $\lim_{x\to a} f'(x) = \ell$ alors f est C^1 sur I et $f'(x) = \ell$.

Exemple 4 — Étudier et la dérivabilité et la continuité de la fonction définie par

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} \text{ sinon.} \end{cases}$$