Thomas Cometx

CHAPITRE 16

Polynômes

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Polynôme à coefficients réels

Un **polynôme** (ou fonction polynomiale) à coefficients réels est une fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle qu'il existe un entier n et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que pour tout réel x

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Les réels a_k sont appelés les **coefficients** du polynôme.

Remarque 1.1 — La construction formelle des polynômes (pas au programme) fait que l'on note usuellement la variable d'un polynôme X (avec une majuscule), c'est à dire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Avec cette notation, le polynôme X^k est la fonction $f : x \mapsto x^k$.

En classe préparatoire ECG, on ne fera pas de distinction entre le polynôme et la fonction associée : on favorisera donc l'utilisation de la notation x^k.

Notation

L'ensemble des polynômes réels est noté $\mathbf{R}[x]$.

Définition 2 | Degré d'un polynôme

- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ est un polynôme avec $a_n \neq 0$, on dit que P est un polynôme de **degré** n. On le note $deg(P) = n$. Par convention, le degré du polynôme nul est $deg(0) = -\infty$.
- a_n est le **coefficient dominant** du polynôme.
- Un polynôme est **unitaire** si son coefficient dominant est 1.

Exemple 1 —

1. Le degré du polynôme $P = 5$ (polynôme constant égal à 5 est 0).
2. Le degré du polynôme $x^{10} + x^5 - 3$ est 10.
3. Le degré du polynôme $(c^2 - 1)x^2 + (c - 1)x + 20$ dépend du paramètre réel c. Cela peut être 2, 1 ou 0.

Définition 3 | Espace $\mathbf{R}_n[x]$

On note $\mathbf{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Formellement il s'écrit

$$R_n[x] = \{P(x) \in R[x], \deg(P) \leqslant n\}.$$

Proposition 1

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}_n[x]$. Alors il existe des uniques $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k.$$

Remarque 1.2 — On dit que les polynômes $(x^k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ forment une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

Théorème 1 | Théorème d'identification des coefficients

1. Si un polynôme vérifie que pour tout réel x, $P(x) = 0$, alors tous ses coefficients sont nuls..
2. Si pour tout x, $P(x) = Q(x)$, alors les polynômes P et Q ont les mêmes coefficients.

Remarque 1.3 — Cela justifie la méthode d'identification des coefficients déjà largement utilisée dans les exercices.

2. OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

Sur les polynômes, on peut faire les mêmes opérations usuelles que sur les fonctions : l'addition (ou des combinaisons linéaires), la multiplication et la composition.

Méthode *(Addition de polynômes)*

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k$ deux polynômes réels. $P + Q$ est le polynôme

$$(P + Q)(x) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (p_i + q_i)x^i$$

où on a complété par des 0 les a_i et b_i non définis. On retiendra que le coefficient de degré i de $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ est p_i+q_i.

Exemple 2 — Calculer les sommes $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ avec

1. $\mathrm{P}(x)=5x^2+3x+1$ et $\mathrm{Q}(x)=-x^2+4$,
2. $\mathrm{P}(x)=(x-1)^2$ et $\mathrm{Q}(x)=-(x+1)^2$.

Méthode *(Multiplication de polynômes)*

$\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ et $\mathrm{Q}=\sum_{k=0}^{m} q_k x^k$ deux polynômes réels. $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ est le polynôme donné par $\mathrm{PQ}(x)=\mathrm{P}(x)\times\mathrm{Q}(x)$. Formellement on a

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}(x)&=\sum_{k=0}^{n} p_k x^k\times\sum_{k=0}^{m} q_k x^{\mathrm{K}}\\&=\sum_{k=0}^{m+n}\sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j} x^k.\end{aligned}$$

Remarque 2.1 — En pratique, on calculera rarement les produits de polynôme avec cette formule.

Exemple 3 — Calculer les produits $\mathrm{P}\times\mathrm{Q}$ avec

1. $\mathrm{P}(x)=3x^2+2x+1$ et $\mathrm{Q}(x)=x^4-1$,
2. $\mathrm{P}(x)=x-1$ et $\mathrm{Q}(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$.

Méthode *(Composition de deux polynôme)*

Soient $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ et $\mathrm{Q}=\sum_{k=0}^{m} q_k x^k$ deux polynômes réels. Le polynôme composé $\mathrm{P}\circ\mathrm{Q}$ est défini par

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\circ\mathrm{Q}(x)&=\mathrm{P}(\mathrm{Q})(x)\\&=\sum_{k=0}^{n} p_k\left(\sum_{j=0}^{m} q_j x^j\right)^k\end{aligned}$$

Exemple 4 — Calculer $\mathrm{P}\circ\mathrm{Q}$ et $\mathrm{Q}\circ\mathrm{P}$ avec

1. $\mathrm{P}(x)=x^2$ et $\mathrm{Q}(x)=x+1$,
2. $\mathrm{P}(x)=1$ et $\mathrm{Q}(x)=x^3-2$.

Proposition 2 | Lien avec le degré

Soient P et Q deux polynômes, alors

1. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$. Si les deux polynômes sont de degrés différents, on a égalité. Sinon, il faut vérifier.
2. deg PQ = deg P + deg Q. Le coefficient dominant est le produit des coefficient dominants.
3. $\deg P \circ Q = \deg P \times \deg Q$. Le coefficient dominant est $p_n q_m^n$ où p_n et q_m sont les coefficients dominants de P et Q.

Proposition 3

Soit $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[x]$ est un espace vectoriel, c'est à dire que

1. $0 \in \mathbf{R}_n[x]$,
2. Si $P \in \mathbf{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda P \in \mathbf{R}_n[x]$,
3. Si $P \in \mathbf{R}_n[x]$ et $Q \in \mathbf{R}_n[x]$, alors $P + Q \in \mathbf{R}_n[x]$.

Exemple 5 —

1. Si $P = x^2 + 1$ et $Q = x^3 + x$. deg P = 2 et deg Q = 3 et deg P + Q = 3.
2. Si $P = X^2 + 2x$ et $Q = -x^2 + 12$, $P + Q = 2x + 1$. On a bien $\deg P + Q < 2$.
3. Si $P = x^2 + 1$ et $Q = x^3 + x$, $PQ = x^5 + 2x^3 + x$. deg PQ = 5 = 2 + 3 = deg P+ deg Q,
4. Si $P = 2x^2$ et $Q = x^3 + 2x$, on a $P \circ Q = 2(x^3 + 2x)^2 = 2x^6 + 8x^4 + 8x^2$ de degré 6 qui correspond bien à $\deg P \times \deg Q = 2 \times 3$.

Corollaire 1

Si PQ = 0 alors P = 0 ou Q = 0.

3. DÉRIVATION DE POLYNÔMES

Définition 4 | Polynôme dérivé

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbf{R}[x]$, on définit son polynôme dérivé

$$\begin{aligned} P'(X) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k \end{aligned}$$

Exemple 6 — Calculer $P'(x)$ avec

1. $P(x) = x^3 - 1$,

2. $P(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Remarque 3.1 — Cette définition coïncide avec la dérivation sur les fonctions.

Proposition 4 | Opérations sur les dérivées

Soient $(P, Q) \in \mathbf{R}[x]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$,
1. $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$
2. $(PQ)' = P'Q + Q'P$,
3. $(P \circ Q)' = Q \times (P' \circ Q)$,
4. $P' = 0 \iff$ P est un polynôme constant.

Proposition 5 | Degré du polynôme dérivé

1. Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}^*$, alors $\deg P' = n - 1$.
2. Si P est constant (de degré 0 ou $-\infty$, alors $P' = 0$ et $\deg P' = -\infty$.

Définition 5 | Dérivées d'ordre supérieur

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$, les dérivées successives de P sont les polynômes définis par

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } k = 0 \\ P'(x) & \text{si } k = 1 \\ (P^{(k-1)})'(x) & \text{si } k > 1 \end{cases}.$$

Exemple 7 — Calculer la dérivée du polynôme

$$P(x) = 1 + x^2 + 5x^5 + \frac{x^4}{12}.$$

Exemple 8 — ***Dérivées des monômes*** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(x) = x^n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

Théorème 2

Si $P \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme de degré n, alors

$$\forall k > n, P^{(k)}(x) = 0.$$

En particulier $P^{(n+1)}(x) = 0$.

4. DIVISION EUCLIDIENNE

Théorème 3 | Division euclidienne de polynômes

Soient A et B deux polynômes réels, alors il existe deux uniques polynômes réels Q et R avec $\deg(Q) < \deg(B)$ tels que

$$P = QA + R.$$

On appelle Q le quotient de la division euclidienne de A par B et R son reste.

Méthode *(Réaliser une division euclidienne de polynômes)*

On souhaite réaliser la division euclidienne de A par B. Il s'agit de trouver le quotient Q et le reste R. On vérifie d'abord le cas trivial où $\deg(A) < \deg(B)$ auquel cas la division euclidienne est donnée par

$$A = 0 \times B + A,$$

donc $Q = 0$ et $R = A$.

Dans le cas général, on rédige comme une division euclidienne d'entiers en cherchant les coefficients du polynôme Q en commençant par celui de degré $\deg(A) - \deg(B)$ (qui est le degré de Q) puis en descendant.

Exemple 9 —

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 - 2x^2 \quad + x + 3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
-6x^3 + 6x^2 - 6x \quad & 6x + 4 \\ \cline{1-1}
4x^2 - 5x + 3 & \\
-4x^2 + 4x - 4 & \\ \cline{1-1}
-x - 1 &
\end{array}
$$

Exemple 10 — ***Réaliser la division euclidienne de*** A ***par*** B ***et*** B ***par*** A ***où*** $A = 5x^3 + 2x^2 + 1$ ***et*** $B = x^2 + 10x$**.**

Proposition 6 | Exemples à connaître

La reste de la division euclidienne d'un polynôme P par

1. un polynôme de degré 1, $B(x) = ax + b$ est $R = P(\frac{-b}{a})$ (polynôme constant),
2. le polynôme $(x - a)$ $(a \in \mathbf{R})$ est $P(a)$ (polynôme constant),
3. le polynôme $(x - a)^2$ $(a \in \mathbf{R})$ est le polynôme $R(x) = P'(a)x + P(a)$.

Exemple 11 — Avec des méthodes analogues, retrouver le reste de la division de P par $(x-a)(x-b)$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ sont des réels distincts.

Définition 6

Soit $A \in \mathbf{R}[x]$ et $B \in \mathbf{R}[x]$. On dit que B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul. Alors il existe un polynôme Q tel que $A = QB$.

5. FORMULE DE TAYLOR

Les polynômes de degré n sont définis par $n+1$ coefficients. En quelque sorte, cela nous dit qu'on a $n+1$ degrés de liberté pour fixer un polynôme de $\mathbf{R}_n[x]$. On peut faire porter ces degrés de liberté sur d'autres nombres, comme les $P(a_i)$ des réels fixés $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ (voir l'interpolation de Lagrange en TD) ou les $P^{(k)}(a)$ où $a \in \mathbf{R}$ est fixé et $k \in [\![0, n]\!]$. C'est le sujet sur prochain théorème.

Théorème 4

Soit $P \in \mathbf{R}_n[x]$ et $a \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned} P(x) &= P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

6. RACINES D'UN POLYNÔME

6.1. Racines

Définition 7 | Racine d'un polynôme

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. On dit que α **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 12 —

1. Les racines de $x^2 - 1$ sont 1 et -1.
2. $x^4 + x^2 + 15$ n'a pas de racine.
3. $P = 5$ n'a pas de racine.
4. $P = 5(x-1)(x-2)(x+2)$ a trois racines : $1, 2, -2$.

5. $P = 12x^2(x-3)$ a deux racines 0 et 3.
6. $P = 0$ a une infinité de racine. C'est le seul polynôme à avoir une infinité de racine.

Théorème 5 | Factorisation par une racine

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on a l'équivalence

$$P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbf{R}[x], P(X) = (x-\alpha)Q(x).$$

Autrement dit, α est une racine de P si et seulement si $(x-a)$ divise P.

Remarque 6.1 — Le théorème se généralise avec plusieurs racines.

$$\alpha_1, \dots \alpha_n \text{ sont des racines de P} \iff \exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)Q(x).$$

On a vu dans un chapitre précédent comment factoriser un polynôme quand on a trouvé une de ses racines. Rappelons comment on peut faire :

1. Si $P = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ est un polynôme **de degré** n et si $P(\alpha) = 0$, alors on cherche à écrire
$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) \text{ avec } Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k.$$
On développe le produit et en identifiant coefficient à coefficient, on établit un système dont la résolution donne les réels q_k. Il peut être utile de remarquer qu'en étudiant les termes de degré n et 0 on trouve rapidement $q_{n-1} = p_n$ et $p_0 = \alpha q_0$.
2. Autre solution, on réalise la division euclidienne de P par $(X-\alpha)$. La quotient donne Q et on peut vérifier ne pas avoir fait d'erreurs de calculs en obtenant un reste nul.

Exemple 13 — ***Factoriser le polynôme*** $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$

Définition 8 | Multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et α une racine de P. L'ordre de multiplicité de la racine α est le plus grand entier $k \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$$

ou de façon équivalente l'unique entier k tel que

$$\exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = (x-\alpha)^k Q(x) \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

Vocabulaire

1. Une racine d'ordre 1 est appelée une **racine simple**,
2. Une racine d'ordre 2 est appelée une **racine double**,
3. Une racine d'ordre 3 est appelée une **racine triple** …

Exemple 14 —

1. $P(X) = (x-3)^2(x-2)^{1000}$ admet 3 pour racine de multiplicité 2 et 2 pour racine de multiplicité 1000.
2. $P(x) = x^2 - 6x + 9$ admet une seule racine double, c'est 3.
3. $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$ admet deux racines simples : 1 et 2.

Théorème 6 | Lien multiplicité - dérivées

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et α une racine de P. On a l'équivalence

$$\alpha \text{ est une racine d'ordre } k \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(n)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 15 — Soit $P = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$. Montrer que 1 est une racine de multiplicité 3 de P. Ensuite, factoriser P.

Théorème 7

Soit P un polynôme de degré n et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ses racines de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k$. On a

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \leqslant n.$$

On en déduit le corollaire suivante **très important**.

Exemple 16 — Soit P un polynôme de degré n tel que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}, P(k) = k^2$. Montrer que $P(x) = x^2$.

Exemple 17 — Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ tel que

$$\int_0^1 P(x)^2 dx = 0.$$

Montrer que P est le polynôme nul.

Corollaire 3

Si $P \in \mathbf{R}_n[x]$ a la somme de multiplicité de ses racines strictement plus grande que n, alors $P = 0$.

6.2. Factorisation de polynômes réels

On connait explicitement la factorisation des polynômes réels.

Théorème 8 | Factorisation des polynômes réels

Tout polynôme réel $P \in \mathbf{R}[x]$ peut s'écrire

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{p} (x^2 + b_i x + c_i)$$

où

- les α_i sont les racines réelles de P, de multiplicité $k_i \in \mathbf{N}^*$,
- les polynômes $x^2 + b_i x + c_i$ sont des trinômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.