Thomas Cometx

CHAPITRE 18

Espaces vectoriels de dimension finie

1. DIMENSION FINIE, BASES

Définition 1 | Espace vectoriel de dimension finie

On appelle **espace vectoriel de dimension finie** tout espace vectoriel qui admet un famille génératrice finie.

Exemple 1 —

1. $\mathbb{R}^n$ admet pour famille génératrice la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ où e_i est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel dont le i-ème coefficient vaut 1 et les autres valent 0.
2. La famille $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$.

Théorème 1 | Existence de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, alors E admet une base (c'est une famille libre et génératrice). De plus, une telle base peut se trouver en extrayant une sous-famille d'une famille génératrice.

Proposition 1

Soit L une famille libre de E et G une famille génératrice de E. Alors

$$\mathrm{card}(L) \leqslant \mathrm{card}(G).$$

Théorème 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition 2 | Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de E et on note dim(E) le cardinal de toute base de E.

Attention

Comme dans le chapitre précédent, il n'y a toujours pas de raison de parler de **la base** d'un espace vectoriel. Chaque espace vectoriel admet une infinité de base. Cherchez par exemple toutes les bases de $\mathbb{R}$ vu comme un espace vectoriel de dimension 1.

2. ESPACES CLASSIQUES DE DIMENSION FINIE.

Proposition 2 | $\dim(\mathbf{R}^n) = n$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, l'espace $\mathbf{R}^n$ est de dimension n.

Proposition 3 | $\dim(\mathbf{R}_n[x]) = n + 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbf{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$. Une base est donnée par la famille $(1, x, \ldots, x^n)$.

Proposition 4

$\mathbf{R}[x]$ n'est pas de dimension finie.

Proposition 5

$\dim \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R}) = np$ Soient n, p des entiers positifs non nuls. $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension np.

Retour sur les suite récurrentes linéaires. L'ensemble des suites vérifiant une certaine relation de récurrence **linéaire** a une structure d'espace vectoriel. Regardons quelques exemples.

Proposition 6

Soit $q \in \mathbb{R}$. L'ensemble des suites géométriques de raison q est un espace vectoriel de dimension 1. Une base est donnée par la suite $(q^n)_n$.

Proposition 7

Soient a et b deux réels tels que $a^2 + 4b \geqslant 0$. Alors l'ensemble des suites

$$\mathrm{F} = \{(u_n)_n : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

est un espace vectoriel de dimension 2.
Dans le cas $a^2 + 4b > 0$, une base est donnée par les suites (r_1^n) et (r_2^n) où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme $x^2 - ax - b$.

Dans le cas $a^2 + 4b = 0$. L'équation caractéristique à une seule racine r et une base de F est donnée par $(r^n)_n$ et $(nr^n)_n$.

Remarque 2.1 — En général, on peut même montrer le résultat suivant : soient $a_0, \dots, a_{k-1}$ des réels, alors l'ensemble

$$\mathrm{F} = \{(u_n)_n : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = \sum_{i=0}^{i-1} a_i u_{n+i}\}.$$

Alors F est un espace vectoriel de dimension k.

3. UTILISATION DE LA DIMENSION FINIE

Théorème 3 | Caractérisation des bases en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. si G est une famille génératrice de cardinal n, alors G est une base,
2. si L est une famille libre de cardinal n, alors L est une base.

Exemple 2 — Montrer que

$$\mathrm{B} = ((1,0,1),(1,1,0),(2,0,3))$$

est une base de $\mathbf{R}^3$.

Corollaire 1

Une famille de $n+1$ polynômes étagée est toujours une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

Exemple 3 — La famille de polynômes $\left(((\mathrm{X}^2-1)^i)^{(i)}\right)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ est une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

Définition 3 | Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_k)$ une famille de E. Le rang de la famille $\mathscr{F}$ est la dimension de l'espace

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}).$$

En particulier, la famille $(v_1, \dots, v_k)$ est toujours génératrice de l'espace vectoriel qu'elle engendre, mais ce n'est pas toujours une base. Pour déterminer le rang de la famille, on retire les vecteurs qui sont des combinaisons linéaires des autres jusqu'à trouver une famille libre qui reste génératrice.

Exemple 4 — Dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$, on veut chercher le rang de la famille

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Théorème 4 | Théorème de la base incomplète

Soit L une famille libre de E un espace vectoriel de dimension finie. On peut compléter L en une base de E.

Théorème 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(F) \leqslant \dim(E).$$

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel de E un espace vectoriel de dimension finie. Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

C'est une méthode fondamentale pour montrer des égalités d'espaces vectoriels autrement difficiles à démontrer!

Exemple 5 — Montrer que, dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$,

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$