Thomas Cometx

CHAPITRE 19

Relations de comparaison

1. ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE SUITES

1.1. Suites négligeables

Définition 1 | Suite négligeable par rapport à une autre

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est négligeable par rapport à (v_n) si

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

On note alors

$$u_n = o(v_n).$$

Vocabulaire

On peut dire que "u_n est un petit o de v_n".

Exemple 1 — Si $a > b > 0$,

1. $\ln(n)^b = o(\ln(n)^a)$,
2. $n^b = o(n^a)$,
3. $b^n = o(a^n)$.

Remarque 1.1 — Il découle de la définition qu'une suite ne peut pas être négligeable par rapport à une suite qui n'annule une infinité de fois, comme la suite nulle.

On peut reprendre des résultats du chapitre sur les suites depuis un nouvel angle.

Théorème 1

Soient $a, b > 0$ et $q > 1$.
1. $\ln(n)^b = n^a$,
2. $n^a = o(q^n)$,
3. $q^n = o(n!)$.

Proposition 1 | Linéarité

Soient u, v, w trois suites réelles et $\lambda \in \mathbf{R}$. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + \lambda v_n = o(w_n)$.

Proposition 2 | Compatibilité avec la multiplication

Si $u_n = o(v_n)$, alors pour $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

Proposition 3 | Transitivité

Soient u, v, w trois suites réelles. Si $v_n = o(u_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $w_n = o(u_n)$.

Exemple 2 — $\ln(n)^5 = o(n^3)$ et $n^3 = o(5^n)$ alors $\ln(n)^5 = o(5^n)$.

1.2. Suites équivalentes

Définition 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule plus à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes si

$$\lim_n = \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note $u_n \sim v_n$

Remarque 1.2 — Pour $\ell \neq 0, u_n \sim \ell \iff \lim_n u_n = \ell$.

Remarque 1.3 — Cela n'a pas de sens intéressant de dire qu'une suite est équivalente en zéro en un point (cela voudrait maladroitement dire qu'elle est nulle à partir d'un certain rang...) Ce qui est intéressant par contre, c'est dire "à quelle vitesse" la fonction tend vers zéro. C'est ce que l'on fait écrivant par exemple

$$u_n = \frac{2}{\ln(n)}.$$

Proposition 4

L'équivalence des suites est
1. réflexive : on a toujours $u_n \sim u_n$,
2. transitive : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$,
3. symétrique : si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.

Théorème 2

Soient u_n et v_n deux suites équivalentes. Si l'une des deux converge, alors l'autre aussi et elles ont la même limite.

Proposition 5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites,

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

Remarque 1.4 — C'est la proposition qui nous donne le plus d'équivalents. Si une suite u_n se décompose comme une suite $u_n = w_n + v_n$ avec $v_n = o(w_n)$, alors $u_n \sim w_n$. Par exemple, si $u_n = n + \ln(n)$, alors comme par croissance comparées, $\ln(n) = o(n)$, on a $u_n = n + o(n)$ et donc $u_n \sim n$.

Théorème 3 | Compatibilité avec les opérations

Soient u, v, x, y des suites réelles et a un réel. Si $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$ alors
1. (compatibilité avec le produit) $u_n v_n \sim x_n y_n$,
2. (compatibilité avec le quotient) $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{x_n}{y_n}$,
3. (compatibilité avec la puissance (fixe)) $(u_n)^\alpha \sim (x_n)^\alpha$.

Exemple 3 — Soient deux suites définies par $u_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \sqrt{n} + n$. En cherchant des équivalents, déterminer la limite de $u_n v_n$.

La limite ne se calcule pas facilement car c'est une forme indéterminée $0 \times \infty$. On doit donc utiliser des équivalents. La suite (u_n) est la somme de deux suites. On regarde laquelle "domine" l'autre. On remarque que $\frac{1/n^2}{1/2n} = \frac{2}{n}$ qui tend vers 0, donc $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{2n})$ ainsi $u_n = \frac{1}{2n} + o\frac{1}{2n})$ donc $u_n \sim \frac{1}{2n}$. De même, $\frac{\sqrt{n}}{n}$ tend vers 0 donc $v_n = n + o(n)$ donc $v_n \sim n$.

Par produit $u_n v_n \sim \frac{n}{2n}$ donc $u_n v_n$ tend vers 2.

Attention

1. Cela ne **fonctionne pas** avec l'addition, on n'a pas forcément $(u_n + v_n) \sim (x_n + y_n)$ si $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$. Par exemple $n^2+3 \sim n^2$ alors que $n^2+3-n^2 = 3$ n'est certainement pas équivalent à $n^2 - n^2 = 0$.

2. Cela ne marche pas avec une puissance qui n'est pas fixe : $u_n^n \sim v_n^n$ est faux en général ! Par exemple $(1+\frac{1}{n}) \sim 1$ alors que $(1+\frac{1}{n})^n \sim e$.
3. En général, l'équivalence des suites n'est pas compatible non plus avec la composition par une fonction.

Proposition 6 | Équivalents des suites polynomiales

Soient $u_n = a_k n^k + \cdots + a_0$ une suite polynomiale de degré k. On a

$$u_n \sim a_k n^k.$$

Remarque 1.5 — Cela implique que

$$\frac{a_k n^k + \cdots + a_0}{b_\ell n^\ell + \cdots + b_o} \sim \frac{a_k}{b_\ell} n^{k-\ell}.$$

Ainsi pour trouver le comportement (et la limite) d'une suite quotient de polynômes, il suffit de regarder le quotient des termes dominants (de plus haut degré).

Remarque 1.6 — Cela se généralise aux puissances non entières. Par exemple

$$(2n\sqrt{n}+n) = (2n^{3/2}+n) \sim 2n\sqrt{n}.$$

Exemple 4 — Donner des équivalents et calculer les limites de :

1. $\frac{3n^2-12n+1}{-n^2+1}$,
2. $9 \times \frac{n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1}{n^8}$,
3. $\frac{n^{2022}}{n^{2023}}$.

2. COMPARAISON DE FONCTION

2.1. Fonctions négligeables au voisinage d'un point

Définition 3 | Fonctions négligeables au voisinage d'un point

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soit x_0 une borne sur laquelle l'intervalle est ouvert (qui peut être $x_0 = \infty$ ou $x_0 = -\infty$). On suppose que g ne s'annule au voisinage de x_0.
On dit que f est négligeable devant g, ou que f est un petit o de g au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note

$$f =_{x_0} o(g).$$

Remarque 2.1 — Si g est une fonction constante, alors $f = o(g)$ implique que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. C'est même équivalent.

Certains résultats du chapitre sur les limites se reformulent avec des fonctions négligeables.

Proposition 7 | Comparaison classique en 0

Soient a, b des réels positifs, alors

$$\frac{1}{|\ln(x)|^b} =_0 o(x^a).$$

Cela signifie que

$$x^n |\ln(x)^b| \longrightarrow_{x \to 0^+} 0.$$

Proposition 8 | Comparaisons classiques en l'infini

Soient $a, b, q > 0$ alors
1. $\ln(x)^q =_{+\infty} o(x^a)$,
2. $x^a =_{+\infty} o(e^{bx})$.
3. $e^{bx} =_{-\infty} o\frac{1}{|x|^a}$.

Remarque 2.2 — Ces deux propositions impliquent en particulier que pour a, b réels positifs

1. $\lim_{+\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0$,
2. $\lim_{+\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$,
3. $\lim_0 x^a \ln(x)^b = 0$,
4. $\lim_{-\infty} x^a e^{bx} = 0$.

On a les mêmes propriétés que pour les suites.

Proposition 9 | Linéarité

Soient f, g, h trois fonctions définies sur I et x_0 une borne ouverte de I. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Si $f =_{x_0} o(h)$ et $g =_{x_0} o(h)$ alors $(f + \lambda g) =_{x_0} o(h)$.

Proposition 10 | Transitivité

Soient f, g, h trois fonctions définies sur I et x_0 une borne ouverte de I. Si $f =_{x_0} o(g)$ et $g =_{x_0} o(h)$ alors $f =_{x_0} o(h)$.

2.2. Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

Définition 4

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et x_0 une borne, éventuellement infinie, de I. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0. On dit que f et g sont équivalentes en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note $f \sim_{x_0} g$.

Remarque 2.3 — Si $\ell \neq 0, f \sim_{x_0} \ell \iff \lim_{x_0} f = \ell$.

Remarque 2.4 — Cela n'a pas de sens intéressant de dire qu'une fonction est équivalente en zéro en un point. Ce qui est intéressant par contre, c'est dire "à quelle vitesse" la fonction tend vers zéro. C'est ce que l'on fait écrivant par exemple

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^3}$$

.

Proposition 11

L'équivalence des fonctions en un point est
1. réflexive : on a toujours $f \sim_{x_0} f$,
2. transitive : si $f \sim_{x_0} g$ et $g \sim_{x_0} g$ alors $f \sim_{x_0} g$,
3. symétrique : si $f \sim_{x_0} g$ alors $g \sim_{x_0} f$.

Théorème 4

Soient f et g deux fonctions équivalentes en x_0. Si l'une des deux converge en x_0, alors l'autre aussi et elles ont la même limite.

Proposition 12

Soient f et g deux fonctions,

$$f \sim_{x_0} g \iff f =_{x_0} g + o(g).$$

Théorème 5 | Compatibilité avec les opérations

Soient f, g, h, k des fonctions définies sur un intervalle I (et x_0 une borne de I) et a un réel. Si $f \sim_{x_0} h$ et $g \sim_{x_0} k$ alors
1. (compatibilité avec le produit) $fg \sim_{x_0} hk$,
2. (compatibilité avec le quotient) $\frac{f}{g} \sim_{x_0} \frac{h}{k}$,
3. (compatibilité avec la puissance (fixe)) $f^a \sim_{x_0} g^a$.

Attention

1. Cela ne **fonctionne pas** avec l'addition, on n'a pas $(f+g) \sim_{x_0} (f_1+g_1)$ si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Par exemple $(1+x) \sim_0 1$ alors que $(1+x-1)$ n'est certainement pas équivalent à $x - x = 0$.
2. Cela ne marche pas avec une puissance qui n'est pas fixe : $f^x \sim g^x$ est faux en général ! Par exemple $(1+\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} 1$ alors que $(1+\frac{1}{x})^x \sim_{+\infty} e$.
3. En général, l'équivalence des fonctions n'est pas compatible avec la composition.

Proposition 13 | Équivalents des fonctions polynomiales

Soient $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_\ell x^\ell$ (avec $a_k \neq 0$ et $a_\ell \neq 0$) une fonction polynomiale de degré k. On a

$$f(x) \sim_{+\infty} a_k x^k$$
$$f(x) \sim_{+\infty} a_k x^k$$
$$f(x) \sim_0 a_\ell x^\ell.$$

Autrement dit, en l'infini f est équivalente à son terme de plus haut degré, alors qu'en zéro c'est le terme de plus bas degré (pas forcément constant) qui domine.

Remarque 2.5 — Cela permet de calculer les limites de quotients de polynômes en zéro et en l'infini.

2.3. Substitution et équivalents

Proposition 14

Soit $x_0 \in [-\infty, +\infty]$. Si $f \sim_{x_0} g$ et (u_n) est une suite de limite x_0, alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.

Proposition 15

Soit $x_0 \in [-\infty, +\infty]$. Si $f \sim_{x_0} g$ et h est une fonction limite x_0 en t_0, alors $f(h(t)) \sim_{t_0} g(h(t))$.

2.4. Équivalents classiques

Les équivalents classiques suivants sont à connaître. Ils se démontrent à l'aide de nombres dérivés.

Théorème 6 | Équivalents classiques

1. $e^x - 1 \sim_0 x$,
2. $\sin(x) \sim_0 x$,
3. $\cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$,
4. $\tan(x) \sim_0 x$,
5. pour $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$,
6. $\ln(1+x) \sim_0 x$.

A l'aide de la propriété de substitution des équivalents, on a la conséquence suivante :

Corollaire 1 | Conséquences des équivalents classiques - 1

Soit (u_n) une suite qui tend vers 0, alors :

1. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
2. $\sin(u_n) \sim u_n$,
3. $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{{u_n}^2}{2}$,
4. $\tan(u_n) \sim_0 u_n$,
5. pour $\alpha \neq 0$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$,

6. $\ln(1+u_n) \sim u_n$.

Corollaire 2 | Conséquences des équivalents classiques - 2

Soit $f(t)$ une fonction qui tend vers 0 en $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ alors :

1. $e^{f(x)} - 1 \sim_{x_0} f(x)$,
2. $\sin(f(x)) \sim_{x_0} f(x)$,
3. $\cos(f(x)) - 1 \sim_{x_0} -\frac{f(x)^2}{2}$,
4. $\tan(f(x)) \sim_{x_0} f(x)$,
5. pour $\alpha \neq 0$, $(1+f(x))^\alpha - 1 \sim_{x_0} \alpha f(x)$,
6. $\ln(1+f(x)) \sim_{x_0} f(x)$.