Thomas Cometx

CHAPITRE 22

Compléments sur les espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel.

Remarque 0.1 — Aucune démonstration n'est exigible dans ce chapitre.

1. SOMMES ET INTERSECTION D'ESPACES VECTORIELS

Proposition 1 | Intersection de deux espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, l'ensemble $F \cap G$ est un sous espace vectoriel.

Remarque 1.1 — On a la généralisation suivante : si $F_1, \dots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels, alors $\bigcap_{i=1}^{k} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 1.2 — $F \cap G$ est le plus grand sous-espace vectoriel de E qui est aussi un sous-espace vectoriel de F et de G.

Remarque 1.3 — $F \cap G$ est toujours non vide, car l'intersection contient toujours 0_E. Si $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que l'intersection est **nulle** ou **réduite à zéro.**

Exemple 1 — Déterminer dans $\mathbf{R}^3$ l'intersection de $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}(1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

Définition 1 | Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme de F et G est l'espace vectoriel

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui s'écrivent comme la somme de d'éléments de F et de G.

Proposition 2

$F+G$ est un espace-vectoriel. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E et F contenant F et G.

Exemple 2 — Dans $M_{2,1}(\mathbf{R})$, déterminer la somme $F+G$ où

1. $F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
2. $F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

Exemple 3 — Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Déterminer

1. $F+\{0_E\}$,
2. $F+E$,
3. $F+F$.

Définition 2 | Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est directe si $F\cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas là, on note la somme des deux espaces $F \oplus G$.

Proposition 3

La somme $F+G$ est directe si et seulement si tout vecteur de $F+G$ s'écrit **de façon unique** comme la somme d'une élément de F et d'un élément de G.

Exemple 4 —

1. Dans $\mathbf{R}^2$.
2. Dans $\mathbf{R}^3$.
3. Dans $M_n(\mathbf{R})$.
4. Dans $\mathbf{R}_n[x]$.

Définition 3 | Espaces vectoriels supplémentaires

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si E est la somme directe de F et de G :

$$E = F \oplus G.$$

Exemple 5 — Soit $E = \mathbf{R}^3, F = \mathrm{Vect}((1,-1,0)$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x - y + z = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Exemple 6 — Dans $M_n(\mathbf{R})$, soit F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et G l'ensemble des matrices triangulaires inférieures. Montrer que $F + G = M_n(\mathbf{R})$ mais que la somme n'est pas directe. Trouver un supplémentaire de F.

Exemple 7 — Soit S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices carrées symétriques (resp. antisymétriques) de $M_n(\mathbf{R})$. On a la somme directe $M_n(\mathbf{R}) = A_n \oplus S_n$.

2. CAS DE LA DIMENSION FINIE

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de F Alors F admet un supplémentaire dans E.

Attention

Le supplémentaire d'un espace vectoriel (de dimension strictement plus grande que 1) n'est **jamais unique**. On le voit dès la petite dimension $\mathbf{R}^2$: $\mathrm{Vect}((1,0))$ admet comme supplémentaire n'importe quelle espace de la forme

$$\mathrm{Vect}((\alpha,1)) \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4 | Formule de Grassmann (dimension de la somme de SEV)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, alors

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

En particulier, si la somme est directe

$$\dim F + G = \dim F + \dim G.$$

Corollaire 1 | Dimension d'un supplémentaire

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G sont des supplémentaires dans E, alors

$$\dim E = \dim F + \dim G.$$

Remarque 2.1 — On peut donc facilement retrouver la dimension d'un supplémentaire G de F, c'est

$$\dim G = \dim E - \dim F.$$

Théorème 2 | Caractérisation des supplémentaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si deux des assertions suivantes sont vérifies :

1. $F \cap G = \{0_E\}$ (l'intersection des sous-espaces est triviale),
2. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$,
3. $E = F + G$ (tout vecteur de E se décompose comme la somme d'éléments de F et G).

alors

$$E = F \oplus G.$$

Remarque 2.2 — Dans ce cas là, la troisième assertion est automatiquement vérifiée.

Remarque 2.3 — On essaiera de se ramener le plus possible à l'utilisation des deux premières propriétés qui sont souvent les plus faciles à démontrer.

Méthode *(Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires)*

1. Première question à se poser : connaît-on les dimensions des espaces en question, ou peut-on les déterminer ?
2. Si c'est le cas, on montre une des deux autres propriétés du théorème précédent. Selon la situation, une des deux sera plus facile à démontrer. C'est souvent la propriété de l'intersection, mais pas toujours, il faut faire attention à l'énoncé (et souvent à la question précédente).
3. On peut aussi raisonner par analyse-synthèse pour tout $x \in E$ déterminer des uniques $y \in F, z \in G$ tels que $x = y + z$.

Proposition 5

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Soient $(f_1, \dots, f_m)$ et $(g_1, \dots, g_n)$ deux des bases respectives de F et G. Si la concaténation des bases $(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$ est une famille libre alors c'est une base de $F + G$.
2. Si de plus E est de dimension finie et si la concaténation des bases

$(f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n)$ est une base de E, alors F et G sont supplémentaires dans E.

Théorème 3 | Concaténation des bases d'une somme directe.

Si $E = F \oplus G$, alors la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E, appelée **base adaptée à la somme directe.**

Théorème 4 | Théorème de la base adaptée

Si E est un espace vectoriel de dimension finie qui s'écrit comme une somme directe de deux sous-espaces vectoriels $E = F \oplus G$. Alors il existe une base de E adaptée à la somme directe.

Exemple 8 — Après avoir démontré que les espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$, donner une base adaptée à la somme directe

$$\mathbf{R}^4 = \mathrm{Vect}((1,1,1,1)) \oplus \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, x+y+z+t=0\}.$$