Thomas Cometx

CHAPITRE 23

Développements limités

1. DÉFINITION

Définition 1 | Développement limité

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0. On dit que f admet un développement limité en x_0 (ou au voisinage de x_0) à l'ordre n s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels qu'au voisinage de x_0,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n).$$

Autrement dit, il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels qu'au voisinage de x_0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon(x)$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en x_0.

Vocabulaire

La partie

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$$

est appelée **partie régulière du développement limité**. Les réels $a_0, \dots, a_n$ sont appelés les **coefficients du développement limité**.

Remarque 1.1 — Soit f une fonction dérivable en x_0. Alors par définition $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers 0. Posons alors $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$. Regardons la quantité $f(x) - a_0 - a_1(x-x_0)$. On a

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-a_0}{x-x_0} - a_1.$$

Par définition de la dérivée, $\frac{f(x)-a_0}{x-x_0}$ tend vers a_1 en x_0, donc la différence tend vers 0. Ainsi le quotient

$$\frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}{x-x_0}$$

tend vers 0, ce qui signifie que $f(x)-a_0-a_1(x-x_0) = o_{x_0}(x-x_0)$. Ainsi

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + o_{x_0}(x-x_0).$$

Cela justifie que tout fonction dérivable en x_0 admet un développement limité d'ordre 1 en x_0. Celui-ci est donné par $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

Exemple 1 — ***Donner un développement limité des fonctions suivantes en*** 0***, à l'ordre*** 1

1. exp,
2. sin,
3. cos,
4. $x \mapsto \ln(1+x)$.

Théorème 1 | Unicité du développement limité

Si une fonction f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n, alors celui-ci est unique. C'est à dire que si $a_0, \dots a_n$ et $b_0, \dots, b_n$ sont des réels qui donnent le DL, alors pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $a_k = b_k$.

2. OPÉRATION SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Proposition 1 | Somme de DL

Soient f et g deux fonctions qui admettent un DL à l'ordre n en x_0, alors $f+g$ aussi. De plus, le DL de $f+g$ est donné en faisant la somme des parties régulières de ceux de f et g. En d'autres termes, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n) \text{ et}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n)$$

alors

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n).$$

Exemple 2 — Si $f(x) = 5 + 4(x - x_0) - 2(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$ et $g(x) = -1 + 2(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$, quel DL de $f + g$ peut on donner en x_0 ?

Proposition 2 | Produit de DL

Soient f et g deux fonctions qui admettent un DL à l'ordre n en x_0, alors $f \times g$ aussi. De plus, le DL de $f \times g$ est donné en faisant le produit des parties régulières de ceux de f et g, puis en tronquant la somme au degré n.

Exemple 3 — (Pour $x_0 = 0$). Si $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o_0(x^2)$ et $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + o_0(x^2)$. On fait alors le produit en remarquant que $x^\alpha o_0(x^\beta) = o_0(x^{\alpha+\beta})$. Dès qu'un terme est de degré supérieur ou égal à 2, on ne le prend pas en compte!. On obtient

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + o(x^2) \\ + \text{ des termes de degré supérieur à deux} \end{aligned}$$

3. FORMULE DE TAYLOR-YOUNG DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Théorème 2 | Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe C^∞ au voisinage de x_0. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, elle admet un développement limité en x_0 et celui-ci est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Remarque 3.1 — Pour des petits ordres cela, donne :

1. ordre 0 : $f(x) = f(x_0) + o_{x_0}(1)$ (parfaitement inutile)
2. ordre 1 : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$
3. ordre 2 : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$.

On continue le cours par une liste de DL usuels (à connaître). Ce sont tous des DL en $x_0 = 0$.

Exponentielle et logarithme Les fonctions exp et ln sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définitions, elles admettent donc des développements limités.

Proposition 3 | DL de l'exponentielle

La fonction exponentielle admet un DL en 0 à tous les ordres. A l'ordre n il est donné par

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

Proposition 4 | DL de ln

Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ admettent des DL en 0 à tous les ordres. A l'ordre n il sont donnés par

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n)$$

et

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n).$$

Remarque 3.2 — On pourra les retenir sous la forme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_0(x^n)$$

et

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o_0(x^n).$$

Exemple 4 — Déterminer la limite en 0 de l'expression

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)}.$$

Les fonctions trigonométriques. Les fonctions cos et sin sont C^∞ sur $\mathbf{R}$. Elles admettent donc des DL en tout point et à tout ordre. On retiendra les DL en zéro.

Proposition 5 | DL de cos et sin

Les DL de cos et sin à l'ordre n en zéro sont donnés par

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^n),$$

et

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^n).$$

Remarque 3.3 — Pour les retenir :

- Pour cos, on prend la partie paire du DL de l'exponentielle. Pour sin, la partie impaire.
- Dans les deux cas, on alterne les signes.

Exemple 5 — Par exemple, le DL à l'ordre 7 de sin est donné par

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o_0(x^7) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{720} + o_0(x^7). \end{aligned}$$

Remarque intéressante, c'est aussi son DL à l'ordre 8 car le terme de degré 8 est nul : on peut remplacer $o(x^7)$ par $o_0(x^8)$.

Le DL de cos à l'ordre 2 est lui donné par

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2).$$

Remarque 3.4 — On pourra retenir

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$$

et

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

Exemple 6 — Déterminer la limite de $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ lorsque x tend vers 0.

Les fonctions puissances Les fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sont de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$. Elles admettent donc des DL de tout ordre.

Proposition 6

Les fonctions puissances $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \neq 0$ admettent en 0 un DL de tout ordre. Si $n \in \mathbf{N}$ est fixé, le DL d'ordre n est donné par

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\dots)(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n).$$

Corollaire 1

En particulier, il faut savoir reconnaitre et utiliser les DL :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_0(x^n)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n).$$

On utilisera aussi le début du DL suivant :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots.$$

Remarque 3.5 — La composition des DL n'est pas au programme, mais on peut "substituer" une variable dans un DL. Par exemple, en substituant x par x^2 dans le dernier DL on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o_0(x^{2n}),$$

ce qui donne un DL à l'ordre $2n$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

4. APPLICATIONS

Afin de présenter des applications très utiles des développements limités, on présente le résultat suivant.

Théorème 3

Si f admet un développement limite en x_0 donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o(x^n) \text{ avec au moins un terme non nul,}$$

alors, si a_k est le premier terme non nul du DL on a

$$f(x) \sim_{x_0} a_k(x-x_0)^k.$$

4.1. Positions relatives de courbes

Le développement limité d'une fonction donne l'allure de sa courbe représentative ! Très logiquement, la tangente à la courbe est donnée par l'équation

$$y = a_1(x-x_0) + a_0.$$

Ce qui va nous intéresser désormais est la position relative de la courbe par rapport à cette tangente. Pour cela on regardera le premier terme non nul (s'il existe) dans le développement limité. On supposera désormais que f admet en x_0 un DL

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_k(x-x_0)^k + o_{x_0}(x^k).$$

La position par rapport à la tangente est alors donnée par le signe de a_k : pour cela on regarde la quantité

$$f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) + a_k(x-x_0)^k + o_{x_0}(x^k)$$

ce qui donne

$$f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) \sim_{x_0} a_k(x-x_0)^k.$$

Théorème 4

Sous les hypothèses précédentes :

1. Si k est pair, la courbe C_f et la tangente ont la même position relative des deux côtés.
   - Si $a_k > 0$, la courbe est au dessus.
   - Si $a_k < 0$ elle est en dessous.
2. Si k est impair la courbe C_f et la tangente ont des positions relatives différentes des deux côtés.

- Si $a_k > 0$, la courbe est au dessus à droite et en dessous à gauche.
- Si $a_k < 0$, la courbe est au dessous à droite et en dessus à gauche.

Exemple 7 — *Sinus et cosinus en* 0

1. Le développement limité de cos en 0 donne
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + 0x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
Cela donne une tangente en 0 horizontale d'équation $y = 0x + 1 = 0$. De plus $\cos(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc le premier terme prépondérant de la différence est toujours positif, donc des deux cotés, la courbe est sous la tangente.
2. Le développement limité de sin en 0 donne
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 0 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
Cela donne une tangente en 0 horizontale d'équation $y = x$. De plus $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc le premier terme prépondérant **change de signe**, donc la courbe sera de part et d'autre de la tangente au voisinage de 0. Si $x > 0$, la différence est négative, donc la courbe est sous la tangente. Si $x < 0$, c'est le contraire.

4.2. Calcul de limites et recherche d'équivalents

Les développements limités permettent d'obtenir des limites pour lesquelles les équivalents usuels n'étaient pas assez précis. C'est utile quand on a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Par exemple, comment déterminer la limite de $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ en 0. On remplace $\sin(x)$ par son DL et on obtient

$$\frac{\sin(x)-x}{x^3} = \frac{x-\frac{x^3}{6}-x+o(x^3)}{x^3} = -\frac{x^3}{6x^3}+\frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}+o(1).$$

Donc la limite est $-\frac{1}{6}$.

Exemple 8 — Soit a_n une suite qui tend vers 0 (sans prendre la valeur 0). Déterminer la limite de $\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$.

Si on n'obtient pas forcément de limite, on peut tout de même obtenir un équivalent. Par exemple, étant donné que $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ tend vers 0, on peut déduire que $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ tend vers 0. On peut se demander par quel signe et à quelle vitesse. Le DL nous donne

$$\frac{\sin(x)-x}{x^2} = \frac{-x^3}{6x^2}+\frac{o(x^3)}{x^2} = -\frac{x}{6}+o(x).$$

On en déduit donc que $\frac{\sin(x)-x}{x^2} \sim -\frac{x}{6}$.

Exemple 9 — Afin de calculer les limites, il ne faut pas hésiter à faire de petit changement de variable. Par exemple, en réalisant le changement de variable $1+h=x$, on peut déterminer la limite en 1^+ de

$$\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}.$$

(Remarque : sans faire de changement de variable ici, on peut s'en sortir avec la formule de Taylor-Young.)

4.3. Développements asymptotiques, asymptotes oblique

Pour certains fonctions, on pourra déduire d'un développements limité ce qu'on appelle un **développements asymptotique**. En toute généralité, si une fonction f admet un DL d'ordre n en zéro que l'on notera

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_{x\to 0}(x^k)$$

alors la fonction $g : x \mapsto f(\frac{1}{x})$ vérifiera

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{x^k} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

C'est ce qu'on appelle un le développement **asymptotique d'une fonction**. On s'intéressera surtout à un cas particulier, le cas des **asymptotes obliques**.

Définition 2 | Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[m, +\infty[$, on dit que la courbe représentative (C_f) de f admet un asymptote oblique en $+\infty$ s'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Son asymptote oblique est alors la droite d'équation $y = ax + b$.

Remarque 4.1 — Cette définition fonctionne en $-\infty$ en faisant les changements qui s'imposent.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax - b = 0$$

revient à dire que

$$f(x) = ax + b + o_{x\to+\infty}(1).$$

Pour obtenir **la position relative de** (C_f) **par rapport à l'asymptote**, il faut préciser ce $o(1)$: on va chercher une fonction h de signe connu, et tendant vers 0 tel que

$$f(x) = ax + b + h(x) + o_{x\to+\infty}(h(x)).$$

Si h est positive, alors la courbe de la fonction sera au-dessus de l'asymptote, et h est négative elle sera en dessous.

Même dans le cas où h change de signe une infinité de fois, on peut dire que la courbe traverse l'asymptote une infinité de fois !

Exemple 10 — ***Trouver l'asymptote oblique en*** $+\infty$ ***de la courbe de la fonction*** f ***définie par*** $f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$

Exemple 11 — ***Trouver l'asymptote oblique en*** $+\infty$ ***de la courbe de la fonction*** f ***définie par*** $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$