

CHAPITRE 25

Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Définition 1 | Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète (réelle) est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

1. $X(\Omega) = \{u_i, i \in I\}$ où I est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{N}$ (on dit que la variable aléatoire prend un nombre dénombrable de valeurs),
2. pour tout $i \in I$, $[X = u_i]$ est un événement de $\mathcal{A}$.

Exemple 1 — $X(\Omega)$ peut être par exemple :

1. un ensemble fini (comme au premier semestre),
2. $\mathbb{N}$,
3. l'ensemble des valeurs d'une suite quelconque.

Remarque 1.1 — Si X est une variable aléatoire, alors pour tout sous-ensemble $J \subset X(\Omega)$ on obtient rapidement que $[X \in J]$ est un événement. En effet :

$$[X \in J] = \bigcup_{j \in J} [X = j].$$

$[X \in J]$ a donc été écrit comme une union (au plus) dénombrable d'événements : c'est donc un événement. Il en découle directement que si par exemple $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles $[X \leq n]$, $[X < n]$, $[X^2 + 1 > n]$ sont par exemple des événements. Pour s'en convaincre, on se rend compte que le premier correspond à $J = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Définition 2 | Loi d'une VA discrète

La loi d'une VA discrète X est la donnée des probabilités $P(X = x)$ pour $x \in \Omega$.

Définition 3 | Fonction d'une VA

Si g est une fonction définie sur $X(\Omega)$ alors $Y = g(X)$ est la variable aléatoire définie par $Y(\omega) = g(X(\omega))$.

On a $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et la loi de Y est donnée pour tout $y \in g(X)$ par

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega), g(x)=y} P(X = x).$$

Exemple 2 — Soit X la VA définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.

On définit $Y = \frac{(-1)^X + 1}{2}$. Donner la loi de Y .

On identifie ici la fonction $g : x \mapsto \frac{(-1)^x + 1}{2}$. On a $Y = g(X)$.

- Déterminons d'abord $Y(\Omega)$: si X est pair, $Y = 1$ et si X est impair, $Y = 0$. Donc $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. On peut déjà en déduire que Y suit une loi de Bernoulli.
- Déterminons pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y)$. Il suffit ici de calculer $P(Y = 1)$. On a :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= \sum_{x \in X(\Omega), g(x)=1} P(X = x) \\ &= \sum_{n \geq 1, g(n)=1}^{+\infty} P(X = n) \\ &= \sum_{n \geq 1, n \text{ pair}}^{+\infty} P(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$ et donc $P(Y = 0) = \frac{2}{3}$. On en déduit que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{3})$.

Définition 4 | VA discrète indépendantes

Des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

**Attention**

Cette condition est plus forte que la condition "les variables sont indépendantes deux à deux" définie par : si $i \neq j$ alors pour tout $(x_i, x_j) \in X_i(\Omega) \times X_j(\Omega)$,

$$P([X_i = x_i] \cap [X_j = x_j]) = P(X_i = x_i) \times P(X_j = x_j).$$

Exemple 3 — Soient X, Y deux variables aléatoires de Rademacher indépendantes, alors X, Y et XY sont deux à deux indépendantes, mais pas mutuellement indépendantes.

Proposition 1

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors pour tout $(J_1, \dots, J_n)$ n -uplet de sous-ensembles respectifs de $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \in J_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in J_i).$$

Exemple 4 — Si pour tout i , $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$, alors pour tout $m_1, \dots, m_n$ des entiers naturels,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq m_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq m_i).$$

Ici, $J_i = \{0, \dots, m_i\}$.

2. ESPÉRANCE D'UNE VA DISCRÈTE

Contrairement au cas des variables aléatoires finies, l'existence de l'espérance n'est pas acquise ici.

Définition 5 | Espérance d'une VA discrète

On dit que X admet une espérance si la série

$$\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

est absolument convergente. On définit alors l'espérance de X par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Remarque 2.1 —

1. Par la formule de transfert (voir plus loin), cela revient à dire que $|X|$ admet une espérance car l'absolue convergence de la série s'écrit

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < +\infty.$$

2. L'absolue convergence assure ici que la somme peut se faire dans n'importe quel ordre donné sur les x (admis).

Théorème 1 | Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé qui admettent une espérance, et si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, alors $aX + bY$ admet une espérance et

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Théorème 2 | Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé qui admettent une espérance, et si $X \leq Y$,

$$E(X) \leq E(Y).$$

Théorème 3 | Existence d'une espérance par domination

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé telles que :

- $|X| \leq Y$
 - Y admet une espérance
- alors X admet une espérance et $|E(X)| \leq E(Y)$.

Remarque 2.2 — Théorème admis.**Remarque 2.3 —** On a aussi un inégalité triangulaire

$$|E(X)| \leq E(|X|).$$

Théorème 4 | Théorème de transfert

Soit X une VA discrète et g une fonction sur $X(\Omega)$. Alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x)$$

est absolument convergente. Dès lors

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

Remarque 2.4 —

1. L'absolue convergence assure que la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation.
2. Théorème admis.

Exemple 5 — Soit X la variable aléatoire définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{1}{en!}$. On définit $Y = (-2)^X$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

1. On montre que Y admet une espérance en montrant que la série $\sum_{x \in X(\Omega)} (-2)^x P(X = x)$ converge **absolument**. Cela revient à montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|(-2)^n|}{en!} \text{ converge.}$$

C'est bien le cas car on reconnaît une série exponentielle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{en!} = \frac{e^2}{e} = e.$$

La variable aléatoire Y admet donc une espérance.

2. On calcule alors l'espérance

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{en!} = \frac{e^{-2}}{e} = e^{-3}$$

car on reconnaît une série exponentielle. Ainsi $E(Y) = e^{-3}$.

Remarque 2.5 — On doit, sauf cas particulier, montrer l'existence de l'espérance avant et à part du calcul. Cela doit bien être explicite sur la copie. Le seul cas où c'est facultatif est si on obtient une série à terme positif. Il faut alors le signaler et dire explicitement que c'est pour cette raison qu'on peut faire un seul calcul.

3. VARIANCE, MOMENTS

Définition 6 | Moment d'une VA

X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si X^r admet une espérance. Le moment d'ordre r de X est alors $E(X^r)$.

Proposition 2

Si X admet un moment d'ordre r alors X admet un moment d'ordre k pour tout $k \in [0, r]$.

Remarque 3.1 — Si X est une variable aléatoire bornée alors elle admet des moments d'ordre r pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ car soit $M > 0$ tel que pour tout $|X| \leq M$ alors $|X^r| \leq M^r$ et la variable constante M^r admet une espérance. Donc par domination X^r admet une espérance.

Définition 7 | Variance d'une VA discrète

Soit X une variable aléatoire qui admet une espérance, alors si $(X - E(X))^2$ une espérance on dit que X admet une variance. Celle-ci est définie par

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

Théorème 5 | Formules de Huygens-Koenig

Soit X une VA discrète, alors X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance (ou si X admet un moment d'ordre 2). Alors on a la formule de Huygens-Koenig :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Définition 8 | Écart-type

Si X admet une variance, alors son écart-type est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 3

Si X admet une variance alors $aX + b$ aussi (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Définition 9 | Variable centrée, réduite

Soit X une VA discrète, on dit que :

1. X est centrée si elle admet une espérance et que $E(X) = 0$,
2. X est réduite si elle admet une variance et que $V(X) = 1$.

Exemple 6 — Si X admet un moment d'ordre 2, alors $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée

réduite.

Proposition 4

Soit X une VA discrète

V admet une variance et $V(X) = 0 \iff X$ est constante.

4. INTRODUCTION À LA FONCTION DE RÉPARTITION

Définition 10 | Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

La fonction de répartition vérifie quelques propriétés

Proposition 5 | Fonction de répartition de d'une VA discrète

Si F_X est la fonction de répartition d'une VA discrète X alors :

1. F_X est croissante
2. F_X est continue et constante par morceaux. Les points de discontinuités sont les points de $X(\Omega)$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Remarque 4.1 — La simulation de variables aléatoires en utilisant la fonction de répartition a été vue en TP.

Définition 11 | Fonction de répartition - version discrète

Pour une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, on utilisera souvent une **fonction de répartition discrète** définie par

$$F_X(n) = P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X = k).$$



Méthode (Lien fonction de répartition discrète - probabilité)

Dans certains cas, la fonction de répartition discrète sera plus facile à calculer



que la probabilité elle-même. On retiendra absolument le lien

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(X \leq n) - P(X \leq n - 1) \\ &= F_X(n) - F_X(n - 1). \end{aligned}$$

5. LOIS USUELLES

5.1. Retour sur la VA certaine

On rappelle que qu'une VA certaine X est définie par :

- $X(\Omega) = \{x_0\}$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $P(X = x_0) = 1$.

Ainsi sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$$

5.2. Retour sur la VA de Bernoulli

On rappelle que qu'une VA de Bernoulli X est définie par :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
- $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

5.3. Loi géométrique

Définition 12 | Loi géométrique

On dit qu'une VA X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$.

Remarque 5.1 — La loi géométrique de paramètre 1 et une loi certaine (VA constante égale à 1). La loi géométrique de paramètre 0 n'a pas de sens et pas d'intérêt.

Remarque 5.2 — La loi géométrique est la loi du rang d'apparition du premier succès dans une épreuve de Bernoulli sans mémoire.



Notation

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Proposition 6 | Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour $p \in [0, 1]$, alors X admet une espérance et une variance. On a :

1. $E(X) = \frac{1}{p}$,
2. $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Proposition 7 | Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_X(n) = P(X \leq n) = 1 - (1 - p)^n.$$

5.4. Loi de Poisson

Définition 13 | Loi de Poisson

On dit qu'une VA X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Remarque 5.3 — La loi de Poisson modélise le nombre d'événements qui se passent dans un intervalle de temps fixé, si on suppose que

- la fréquence d'arrivée de l'événement est connue
- les occurrences de ces événements sont indépendantes.

Par exemple, si en moyenne les clients d'un supermarché arrivent en caisse avec une fréquence de 1 minutes, le nombre de clients qui arrivent dans un intervalle de temps d'une heure (soit 60 minutes) sera modélisé par une loi de Poisson de paramètre 60.



Notation

On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 8 | Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$, alors X admet une espérance et une variance. On a :

1. $E(X) = \lambda$,
2. $V(X) = \lambda$.