Thomas Cometx

CHAPITRE 3

Nombres réels, inégalités

1. RAPPELS

1.1. Quelques règles de calcul

Pour comparer deux réels, on a deux signes : $\leqslant$ (inégalité large) et $<$ (inégalité stricte). En français, quand on dit qu'un nombre x **est plus petit que** y, on sous-entend $x \leqslant y$, donc que x est inférieur ou égal à y. Pour décrire $x < y$, on dit que x est strictement inférieur à y.

Définition 1 | Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

On dit que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car
1. **(Réflexivité)** $\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant x$,
2. **(Antisymétrie)** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$,
3. **(Transitivité)** $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$.

Proposition 1 | Règles de calcul

Soit x, y, z, t, λ des nombres réels.
1. $x < y \Rightarrow x \leqslant y$ (la réciproque est fausse),
2. **[Addition]**
   - $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$
   - $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
3. **[Addition - 2]**
   - si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$ alors $x + z \leqslant y + t$,
   - si $x < y$ et $z \leqslant t$ alors $x + z < y + t$,
4. **[Multiplication]**
   - par un réel positif : si $(x \leqslant y)$ et $\lambda > 0$ alors $\lambda x \leqslant \lambda y$, (fonctionne aussi avec $x < y$)
   - par un réel négatif : si $(x \leqslant y)$ et $\lambda < 0$ alors $\lambda x \geqslant \lambda y$, (fonctionne aussi avec $x < y$)
   - d'inégalités positives : si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant z \leqslant t$ alors $0 \leqslant xz \leqslant yt$,
5. **[Signe d'un produit]** $xy \geqslant 0$ si et seulement si x et y sont des réels de même signe,

6. **[Passage à l'inverse]** si $x \leqslant y$ et x, y sont des réels non nuls **de même signe** alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$. Fonctionne aussi avec $x < y$.

Attention

Si x et y sont de signe opposé, le passage à l'inverse ne change pas l'ordre car il ne garde pas le signe.

Exemple 1 — ***Montrer que*** $\forall x > 2, \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{5}$.

Proposition 2 | Composition par une fonction croissante

1. Si f est une fonction croissante sur un intervalle I alors

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

La réciproque n'est vraie que si f est strictement croissante.

2. Si f est une fonction strictement croissante sur un intervalle I alors

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, x < y \iff f(x) < f(y).$$

3. Si f est une fonction décroissante sur un intervalle I alors

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

La réciproque n'est vraie que si f est strictement décroissante.

4. Si f est une fonction strictement décroissante sur un intervalle I alors

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, x < y \iff f(x) > f(y).$$

1.2. Intervalles

Définition 2 | Intervalles bornés de $\mathbb{R}$

Les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ sont les intervalles suivants :
- Intervalle fermé : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$,
- Intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé) : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}$,
- Intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé) : $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b\}$,
- Intervalle ouvert : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.

Définition 3 | Intervalles non bornés de $\mathbb{R}$

Les intervalles non bornés de $\mathbb{R}$ sont les intervalles suivants :
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geqslant a\}$,
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$,
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant b\}$,
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$.

2. VALEUR ABSOLUE, INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Définition 4 | Valeur absolue

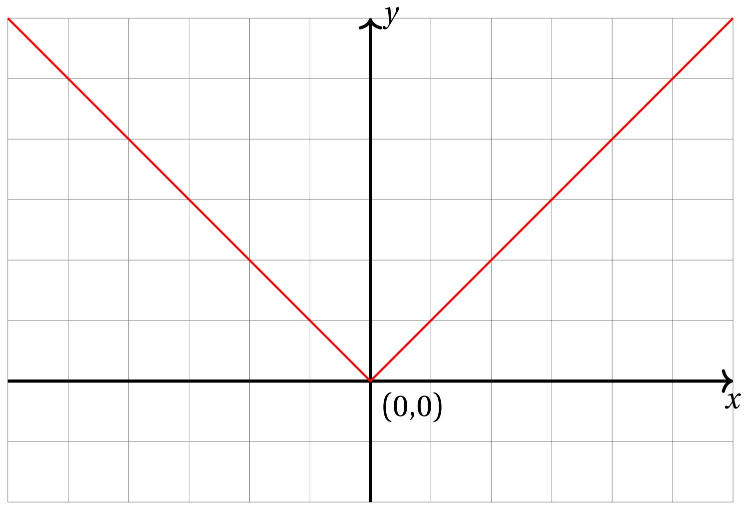
La valeur absolue d'un nombre réel x est donnée par

$$|x| = x \text{ si } x \geqslant 0$$
$$\text{ou } -x \text{ si } x < 0.$$

Proposition 3

La fonction qui a une réel associe sa valeur absolue est
- continue sur $\mathbb{R}$,
- dérivable sur $]-\infty, 0[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$,
- non dérivable en 0
- strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Représentation graphique :



Théorème 1 | Inégalité triangulaire

Pour tout réels x, y on a

$$||x|-|y|| \leqslant \underline{|x+y| \leqslant |x|+|y|}.$$

La deuxième inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Preuve On commence par prouver la deuxième inégalité. Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a les équivalence

$$\begin{aligned}|x+y| \leqslant |x|+|y| &\iff |x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2\\ &\iff x^2+y^2+2xy \leqslant x^2+y^2+2|x||y|\\ &\iff xy \leqslant |xy| \text{ ce qui est toujours vrai.}\end{aligned}$$

On a égalité si et seulement si $xy = |xy|$ autrement dit si x et y sont de même signe.

Pour résoudre les inéquations avec des valeurs absolues, on est souvent amené à utiliser des disjonctions de cas.

Exemple 2 — ***Résoudre l'inéquation*** $|2x-1|+|2x+1| \leqslant |4x+2|$.

On pourra utiliser les résultats suivants :

Proposition 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M \geqslant 0$,

$$|x| \leqslant M \iff -M \leqslant x \leqslant M.$$

   Cela fonctionne aussi avec les inégalités strictes.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|xy| = |x||y|.$$

3. BORNES

Dans toute cette partie, $X \subset \mathbb{R}$ est un une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 5 | Majorant, minorant

Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que
- M est un **majorant** de X si pour tout $x \in X$, $x \leqslant M$,
- M est un **minorant** de X si pour tout $x \in X$, $x \geqslant M$.

Remarque 3.1 — On a l'habitude de noter un minorant m (avec une minuscule).

Définition 6 | Partie majorées, minorées, bornées

On dit que :
1. X est **majorée** si elle admet un majorant,
2. X est **minorée** si elle admet un minorant,
3. X est **bornée** si elle admet un minorant et un majorant.

Exemple 3 —

1. $]-\infty, 2[$ n'est pas minoré. Mais il est majoré et tout réel supérieur ou égal à 2 en est un majorant,
2. $\mathbb{R}$ n'est ni majoré ni minoré,
3. $\mathbb{Z}$ n'est ni minoré ni majoré,
4. $\mathbb{N}$ est minoré par tout réel inférieur ou égal à 0. Il n'est pas majoré.

Proposition 5

Une partie X est bornée si et seulement si l'ensemble $Y = \{|x|, x \in X\}$ est majoré.
C'est vrai car 0 est un toujours un minorant de Y.

L'exemple suivant est important car il montre qu'on peut être très efficace dans les exercices !

Exemple 4 — ***Montrer que*** $A = \{1 + \cos(n), n \in \boldsymbol{N}\}$ ***est borné.***

Soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned} |1+\cos(n)| &\leqslant 1 + |\cos(n)| \text{ par l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant 1+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant 2$, donc A est borné.

Remarque 3.2 — Si X est majorée, alors elle admet une infinité de majorants. En effet si M est un majorant de X, tout réel supérieur à M l'est aussi. Par exemple, $[0, 2]$ est admet 2 pour majorant, mais aussi 3, 3.5, ou 2.0001 ou 10000000.

Définition 7 | Maximum, minimum

1. Le **maximum** d'un ensemble X, s'il existe, est un majorant de X qui appartient à X.
2. Le **minimum** d'un ensemble X, s'il existe, est un minorant de X qui appartient à X.

Exemple 5 —

1. $\mathbb{R}$ n'a ni minium ni maximum,
2. tout intervalle $[a, b]$ admet a pour minimum et b comme maximum,
3. $[-5, 1[$ admet -5 pour minimum mais n'a pas de maximum,
4. $[-5, 1[\cup\{2\}$ a -5 pour minimum et 2 pour maximum,
5. $\{\cos(x), x \in \mathbb{R}\}$ admet -1 pour minimum et 1 pour maximum.

Remarque 3.3 — Un **extremum** (c'est à dire un minimum ou un maximum) est unique s'il existe.

Définition 8 | Borne supérieure, borne inférieure

La **borne supérieure** de X, lorsqu'elle existe, est le plus petit de ses majorants. De même, la **borne inférieure** de X, lorsqu'elle existe, est le plus grand de ses minorants.

Notation

La borne supérieure de X, si elle existe est notée $\sup \mathrm{X}$. La borne inférieure de X est notée, si elle existe, $\inf \mathrm{X}$.

Proposition 6

Lorsqu'un sous-ensemble X admet un maximum (resp. un minimum), il admet celui-ci comme borne supérieure (resp. inférieure).

Exemple 6 —

1. $\mathbb{R}$ n'a ni borne inférieure ni supérieure car il n'a ni majorant ni minorant
2. L'intervalle $\mathrm{I} = [0, 1[$ admet 0 comme borne inférieure car c'est son minimum.
   Il admet aussi 1 comme borne supérieure. En effet 1 est bien un majorant de I : tout élément de $[0, 1[$ est bien inférieur à 1.
   Montrons que c'est le plus petit des majorants de I : pour cela on montre que tout réel strictement plus petit que 1 **n'est pas** un majorant. Soit $m < 1$: si m est négatif, ça ne peut pas être un majorant de I car $0 > m$. Si $m \in [0, 1[$, alors $m' = \frac{m+1}{2} \in \mathrm{I}$ alors que $m' > m$. Donc m n'est pas un majorant de I.
   Ainsi I admet une borne supérieure et $\sup \mathrm{I} = 1$.

On en déduit une méthode générale.

Méthode

Pour montrer que qu'un réel x est la borne supérieure d'une partie $X \subset \mathbb{R}$.

1. On montre que x est un majorant de X.
2. On montre que tout majorant M de X est nécessairement inférieur à x.

Théorème 2 | Théorème de la borne supérieure

Toute partie majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement inférieure).

Remarque 3.4 — Ce théorème découle de la construction de $\mathbb{R}$ qui est largement hors-programme. Il est donc admis.

La dernière proposition découle directement de la définition de borne supérieure (comme plus petit des majorants) et inférieure.

Proposition 7 | Passage à la borne supérieure / inférieure

1. Soit X un ensemble majoré, et $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in X, x \leqslant M \text{ alors } \sup X \leqslant M.$$
2. Soit X un ensemble minoré, et $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in X, x \geqslant M \text{ alors } \inf X \leqslant M.$$

4. PARTIE ENTIÈRE

Définition 9 | Partie entière d'un réel

La partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Exemple 7 —

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor n \rfloor = n$,
2. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3, \lfloor 101.0001 \rfloor = 101$,
3. attention aux négatifs : $\lfloor -7.5 \rfloor = -8$.

Remarque 4.1 — On peut aussi parler de la partie entière supérieure, notée $\lceil x \rceil$, qui est le plus petit entier supérieur ou égal à x.

Proposition 8

La fonction qui à un réel x associe sa partie entière est
1. croissante sur $\mathbb{R}$,
2. continue et constante sur tout intervalle de la forme $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$,
3. discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 9

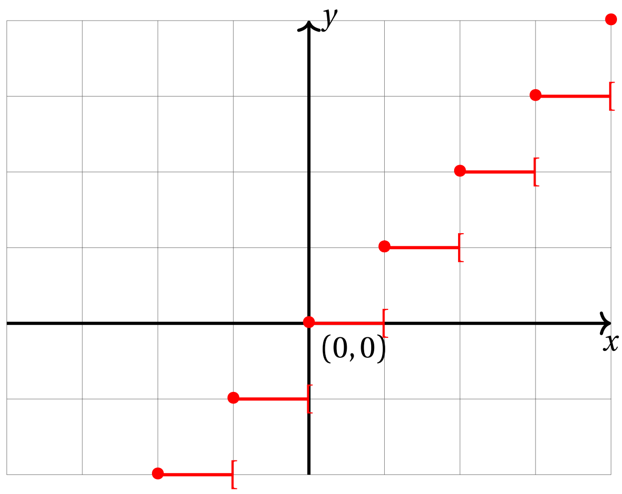
La fonction partie entière vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$$

Remarque 4.2 — Dans un exercice sur les parties entières, on utilisera souvent que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Représentation graphique.



Comment étudier égalités et inégalités avec des parties entières.

1. On cherche si l'égalité à étudier est périodique.

2. On fait l'étude sur l'intervalle trouvé : on le découpe en sous-parties sur lesquelles on peut trouver une expression plus sympathique en se débarrassant des parties entières.
3. Sur chacune de ces parties, on résout l'équation ou l'inéquation.