CHAPITRE 9

Calcul matriciel

1. MATRICES RECTANGULAIRES

1.1. Définitions

Définition 1 | Ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$

Soient n et p des entiers naturels. Une matrice rectangulaire de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

Si $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, on note usuellement $m_{i,j}$ ses coefficients. On note aussi

$$\mathrm{M} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

La matrice se note

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \cdots & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1 —

1. une matrice de $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbf{R})$:
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -6 \\ 83 & 82 & 106 \end{pmatrix}.$$
2. une matrice de $\mathrm{M}_{3,4}(\mathbf{R})$:
$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. une matrice "carrée" de $M_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$C = \begin{pmatrix} \pi & -\frac{3}{2} \\ 0,5 & e^{-3} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1 — Une matrice de $M_{1,1}(\mathbf{R})$ est un nombre réel!

Vocabulaire ***(Matrices particulières)***

On distinguera particulièrement :

1. les matrices **carrées**, qui ont autant de ligne que de colonnes.
2. les matrices colonnes, qui ont une seule colonne, et donc appartiennent à $M_{n,1}(\mathbf{R})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas là, on parlera aussi de **vecteur colonne** ou tout simplement de **vecteur**. L'espace $M_{n,1}(\mathbf{R})$ est en bijection évidente avec $\mathbf{R}^n$.
3. les matrices lignes, qui ont une seule ligne, et donc appartiennent à $M_{1,n}(\mathbf{R})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas là, on parlera aussi de **vecteur ligne**. L'espace $M_{1,n}(\mathbf{R})$ est en bijection évidente avec $\mathbf{R}^n$.
4. La matrice nulle de $M_{n,p}(\mathbf{R})$, notée $0_{n,p}$ dont tous les coefficients sont nuls.

Remarque 1.2 — Deux matrices sont **égales** et on note $A = B$ si elles appartiennent au même ensemble de matrices $M_{n,p}(\mathbf{R})$ et si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, A_{i,j} = B_{i,j}.$$

2. OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

On peut faire plusieurs opérations sur les matrices : multiplication par un scalaire, addition, et même multiplication de matrices.

Multiplication par un scalaire. Si $M \in M_{n,p}(\mathbf{R})$ est une matrice et $\lambda \in \mathbf{R}$, la matrice λM est définie par

$$(\lambda M)_{i,j} = \lambda m_{i,j}.$$

On multiplie en fait tous les coefficients par λ.

Somme de matrices. Si $(A, B) \in M_{n,p}(\mathbf{R})^2$ sont des matrices de même dimensions, alors on peut les additionner :

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

Produit de matrices. On ne peut pas multiplier n'importe quelles matrices. On peut le faire sous certaines conditions : soit n, p, m des entiers, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,m}$ alors on définit la matrice $AB \in M_{n,m}$ par

$$(A \times B)_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Remarque 2.1 — Si on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de B, alors le coefficient $(AB)_{i,j}$ est le produit $L_i C_j$.

Remarque 2.2 — Avec les mêmes notations, la matrice AB est la matrice dont les colonnes sont les produits AC_j.

Proposition 1

Le produit matriciel est associatif : si $A \in M_{n,p}, B \in M_{p,m}, C \in M_{m,\ell}$ alors

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

On notera donc simplement ce produit ABC ou $A \times B \times C$.

Proposition 2

La multiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition : si $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{m,p}(\mathbb{R})$alors

$$(\lambda A + B) \times (\mu C + D) = \lambda\mu AC + \lambda AD + \mu BC + BD.$$

Attention

La multiplication matricielle n'est pas commutative : a priori on ne peut pas écrire $AB = BA$ pour plusieurs raisons.

1. Les dimensions pourraient ne pas être les bonnes !
2. Même si elles sont bonnes, le calcul ne donne pas le même résultat en général.

Attention

La propriété

$$"AB = 0" \Rightarrow "A = 0" \text{ ou } "B = 0"$$

n'est pas vraie pour les matrices ! Regardez par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pourtant A n'est pas la matrice nulle.

Transposée d'une matrice.

Définition 2 | Transposée d'une matrice

Si $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on peut définir la transposée de M par ${}^tM \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times \in [\![1,m]\!], ({}^tM)_{i,j} = M_{j,i}.$$

En pratique, les colonnes de M deviennent les lignes de ${}^tM$.

Exemple 2 —

Proposition 3 | Linéarité

Pour tout A, B dans $M_{n,p}(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$^t(A+) = {}^tA + \lambda\, {}^tB.$$

Proposition 4

Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbf{R})$, $^t({}^tA) = A$.

Proposition 5

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbf{R})$ et $B \in M_{p,m}(\mathbf{R})$ alors

$$^t(AB) = {}^tB\, {}^tA.$$

3. MATRICES CARRÉES

3.1. Ensemble des matrices carrées

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul.

Définition 3 | Ensemble $M_n(\mathbf{R})$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n, $M_{n,n}(\mathbf{R})$, sera noté plus simplement $M_n(\mathbf{R})$.

Définition 4

On définit les matrices particulières suivantes :

1. La matrice nulle O_n dont tous les coefficients valent 0.
2. La matrice I_n dont les coefficients valent 1 si $i = j$ et 0 sinon.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Les matrices de la forme λI_n pour $\lambda \in \mathbf{R}$ sont appelées **matrices scalaires.**

Proposition 6

Soient A, B des matrices carrées d'ordre n et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

1. $A + \lambda B \in M_n(\mathbf{R})$,
2. $AB \in M_n(\mathbf{R})$.

Proposition 7

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$:

1. $\mathrm{O}_n\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{O}_n = \mathrm{O}_n$,
2. $\mathrm{I}_n\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{I}_n = \mathrm{A}$.

Définition 5 | Puissances d'une matrice carrée

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On définit les puissances de A par :

1. I_n si $k = 0$,
2. sinon, $\mathrm{A}^k = \mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \cdots \times \mathrm{A}$ (k fois).

Définition 6 | Polynôme d'une matrice carrée

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ et $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, on définit $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ par

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{d} p_k \mathrm{A}^k$$

où

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{d} p_k x^k.$$

Définition 7 | Matrices qui commutent

Soit A et B deux matrices carrées de taille n. On dit que A et B commutent si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Exemple 3 —

1. O_n commute avec toutes matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$,
2. I_n commute avec toutes matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$,
3. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ alors A commute avec tout polynôme matriciel en A :

$$\mathrm{AP}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{A}.$$

3.2. Familles particulières de matrices

Définition 8 | Matrices triangulaires

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

1. A est **triangulaire supérieure** si tous ses coefficients en dessous de la diagonale sont nuls :

$$i > j \Rightarrow \mathrm{A}_{i,j} = 0.$$

2. A est **triangulaire inférieure** si tous ses coefficients au dessus de la diagonale sont nuls :

$$i < j \Rightarrow A_{i,j} = 0.$$

Proposition 8

Soient A, B des matrices triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures) et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$$A + \lambda B \text{ est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure)}$$

et

$$A \times B \text{ est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure)}$$

donc les coefficients diagonaux sont les produits de ceux de A et B.

Remarque 3.1 — On dit que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est stable par combinaison linéaire et produit.

Définition 9 | Matrices diagonales

Une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est **diagonale** si tous ses coefficients hors diagonale sont nuls :

$$i \neq j \Rightarrow A_{i,j} = 0.$$

Proposition 9

Soient A, B des matrices diagonales et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$$A + \lambda B \text{ est une matrice diagonale.}$$

Remarque 3.2 — A est diagonale si et seulement si elle est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Définition 10 | Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$.
1. A est une matrice symétrique si ${}^tA = A$.
2. A est une matrice antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Proposition 10

Soient A, B des matrices symétriques (resp antisymétrique) et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$$A + \lambda B \text{ est une matrice symétrique (resp. antisymétrique).}$$

Proposition 11

Une matrice antisymétrique a ses coefficients diagonaux nuls.

Proposition 12

Toute matrice carrée se décompose de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3.3. Matrices inversibles

Définition 11 | Matrice inversible

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbf{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Vocabulaire

Une telle matrice B est appelée **matrice inverse** de la matrice A ou **inverse de** A.

Proposition 13

S'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ alors l'autre condition est automatiquement remplie et alors l'inverse à gauche et l'inverse à droite sont les mêmes. De plus, l'inverse d'une matrice carrée est unique.

Remarque 3.3 — Résultat admis.

Proposition 14

Si A admet une inverse, alors cette inverse est unique.

Notation

L'inverse d'une matrice A sera noté A^{-1}.

Proposition 15

Si A et B sont des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ inversibles alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition 16

Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est inversible alors ${}^tA$ aussi et

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Autrement dit l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.

Théorème 1 | Inverse d'une matrice diagonale

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale. On a l'équivalence

$$\text{A est inversible} \iff \text{tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls.}$$

Dans ce cas, l'inverse de A est la matrice diagonale de coefficients inverses de ceux de A.

Théorème 2 | Inverse d'une matrice triangulaire

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Alors A est inversible et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Son inverse est alors une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.

Théorème 3 | Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a l'équivalence

$$\text{A est inversible} \iff ad - bc \neq 0.$$

Auquel cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.4 — La quantité $ad - bc$ est appelée le **déterminant de** A. On le note parfois $\det(A)$.