

TD 1 : Rappels de terminale, calculs

1. CALCULS

Exercice 1 Simplifier les calculs suivants

- $5 + 2 \times \frac{7}{3}$
- $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{25}{12}}$
- $\frac{12}{x-1} + \frac{3x-9}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^3-x}$
- $(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}) \times (\frac{12}{7} + \frac{11}{2})$.

Exercice 2 Transformer chacune des expressions suivantes en expressions égales avec le moins de racines carrées possibles (notamment, on ne veut **aucune** racine carrée au dénominateur).

- $A = \frac{5}{2-\sqrt{7}}$,
- $B = \sqrt{64} + \sqrt{128}$,
- $C = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$,
- $D = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$,
- $E = \sqrt{12x^2 - 72x + 108}$,
- $F = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)$

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes

- $A = (-1)^n \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n+2}$,
- $B = \frac{2^4 \times 4^2}{8 \times 3^{-4}}$,
- $C = \frac{3^{-2} 2^{-2}}{3^{-7} 2^2}$,
- $D = x \sqrt{x} x^2 \times 7 \frac{x^2}{x^3}$.

2. RAPPELS SUR LES SUITES

Exercice 4 Parmi les suites suivante, déterminer lesquelles sont arithmétiques ou géométriques :

- $u_n = 3 + 5n$,
- $v_n = 12 - \sqrt{n}$,
- $w_n = -7^n$,
- $x_n = \sqrt{2}^{2n+1}$,
- $y_n =$ le n -ième entier positif pair,
- $z_n = \cos(n\pi)$
- $z'_n = \sin(n\pi)$.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

1. Montrer que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= u_0 + \cdots + u_n \\ &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.\end{aligned}$$

2. En déduire la valeur des sommes

$$2 + 4 + 6 \cdots + 2n \text{ et } 1 + 3 + \cdots + 2n + 1.$$

Exercice 6 Déterminer une expression explicite, et éventuellement la limite, de la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 10.$$

3. POLYNÔMES

Exercice 7 Réaliser l'étude complète des trinômes du second degré suivants : forme canonique, racines, variations, signe, courbe représentative.

1. $P(x) = x^2 - 3x + 2$,
2. $Q(x) = -3x^2 + 18x - 27$,
3. $R(x) = -2x^2 + 4x - 7$.

Exercice 8 Résoudre les équations suivantes en se ramenant à l'étude d'un polynôme du second degré :

1. $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$,
2. $-x^{10} + 3x^9 - 3x^8 = 0$,
3. $e^{6x} + 4e^{3x} = 1$.

4. ÉTUDES DE FONCTION

Exercice 9

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = (2x - 5) \times e^{-x}$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Exercice 10 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de f .
3. En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.