TD 13 - Probabilités finies

1. GÉNÉRALITÉS

Exercice 1 Soient A, B, C trois évènements d'un espace probabilisable. Exprimer les évènements suivants à l'aide des opérations élémentaires sur les événements :

1. Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements est réalisé.
3. Au moins deux des trois évènements sont réalisés.
4. Pas plus de deux des trois évènements sont réalisés.

Exercice 2 Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement k soit proportionnelle à k.

Exercice 3 Soient $A_1, \ldots A_n$ des événements sur un espace probabilisé Ω. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \geq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

Exercice 4 Soient $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{R}$ On pose $\Omega = [\![1, n]\!]$ et P la fonction définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par $\forall k \in \Omega P(k) = ak\binom{n}{k}$. À quelle condition sur a la fonction P définit-elle une probabilité ?

Exercice 5 On lance deux fois un même dé. Montrer que la probabilité d'obtenir deux fois la même valeur est minimale lorsque le dé est équilibré.

Exercice 6 On considère des dés équilibrés. Lequel des événements qui suivent est le plus probable ?

1. A "Ne pas obtenir de un ni de six en 2 lancers".
2. B "Obtenir un six en moins de 4 lancers".
3. C "Obtenir un double - six en moins de 24 lancers de deux dés".
4. D "Obtenir toutes les valeurs de un à six en moins de 8 lancers".

Exercice 7 Un archer a la probabilité $p \in [0, 1]$ d'atteindre une cible à chaque essai. On considère que ses tirs sont tous indépendants. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Quelle est la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible en n tentatives ?
2. Quelle est la probabilité qu'il touche sa cible pour la première fois lors du n-ième essai ?
3. Quelle est la probabilité qu'il touche exactement k cibles en n essais ?
4. Quelle est la probabilité qu'il touche sa k-ième cible lors du n-ième essai ?

Exercice 8 Dans une classe de n élèves (dans laquelle, mystérieusement, aucun élève n'est né le 29 février. Quelle est la probabilité que tous les élèves aient un anniversaire différent ?

2. INDÉPENDANCE

Exercice 9 On lance à dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des évènements

A : "on obtient le tirage 2, 4 ou 6" et B : "on obtient le tirage 3 ou 6 ".

Exercice 10 Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires, et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (et de façon équiprobable), et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note :

- B_1 l'évènement "obtenir une boule blanche au premier tirage"
- B_2 l'évènement "obtenir une boule blanche au deuxième tirage".

Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 11 Lorsqu'on choisit une moto aléatoirement dans une fabrique, elle peut présenter deux défauts : le pot d'échappement est mal fixé, ou le guidon n'est pas aligné. On note A l'événement : "le pot d'échappement est mal fixé" et B l'évènement : "le guidon n'est pas aligné". On suppose que $P(A) = 0,1$ et $P(B) = 0,2$, et que les évènements A et B sont indépendants. Déterminer la probabilité que la moto ne présente aucun défaut.

3. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET TOTALES

Exercice 12 Soient A, B, C trois événements tels que $P(B \cap$

C) $\neq 0$. Montrer que

$$P_{B\cap C}(A)P_C(B) = P_C(A\cap B).$$

Exercice 13 Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
2. Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 14 On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne de numéro k contient k boules blanches et $N-k$ boules rouges. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit blanche sachant que les n précédentes le sont toutes ?
2. Que devient cette probabilité lorsque N tend vers l'infini ?

Exercice 15 Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 16 Une famille a deux enfants. On suppose qu'il ne sont pas nés en même temps, que leur sexe est indépendant et qu'avoir un garçon ou une fille est un choix équiprobable.

1. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
2. Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
3. On sait qu'au moins l'un des enfants est un garçon, quelle est la probabilité que les deux le soient ?
4. On sait que l'un des deux enfants est un garçon et qu'il est né un le lundi. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon ?

Exercice 17 On tire successivement deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir tiré deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde boule tirée soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des deux boules soit rouge ?

5. La seconde boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que la première boule tirée le soit aussi ?

Exercice 18 Une lampe est éteinte dans une pièce lorsque survient une coupure d'électricité. Des individus pénètrent dans cette pièce et basculent plusieurs fois l'interrupteur en espérant que la lumière s'allume, sans succès... Quand l'électricité revient, quelle est la probabilité que la lumière soit allumée sachant que n individus sont entrés dans la pièce et que chacun a la probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir repositionné l'interrupteur dans l'état où celui-ci figurait lorsqu'il est entré

Exercice 19 **[Avantage Nadal.]**

Au tennis, un joueur a 65 pourcents de chance de gagner le point sur son service. Le score est de 40-40. Quelle est la probabilité que le serveur gagne ? On calculera cette probabilité à l'aide d'un système complet d'événements associé à un nombre de coups de bien choisis.

Exercice 20 **[Avec la formule de Bayes.]**

Dans une usine, 2 pourcents des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet d'écarter 99 pourcents des articles lorsqu'ils sont défectueux mais aussi 5 pourcents des articles qui ne le sont pas !

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un article écarté par le contrôle soit défectueux ?
3. Quelle est la probabilité qu'un article en sortie d'usine soit défectueux ?

Exercice 21 **[Encore la formule de Bayes.]**

Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un "six" une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées). On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

1. On obtient un "six". Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
2. Au contraire, on a obtenu un "cinq". Même question.

Exercice 22 Un jeu télévisé oppose un présentateur à un candidat. Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Le joueur choisit une première porte. Le présentateur ouvre alors une porte qui révèle une chèvre (mais pas la porte choisie par le candidat). Le joueur a alors deux choix : soit il garde sa porte et le gain derrière, soit il change pour la porte restante. Calculer la probabilité de victoire dans chacun des cas.