TD 14 bis - Probabilités finies

1. GÉNÉRALITÉS

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire uniforme sur $\{-1,0,1\}$. Déterminer la loi de $Y = X^2$ ainsi que son espérance.

Exercice 2 Soit X, Y deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On pose $Z = \max(X,Y)$.

1. Que vaut $Z(\Omega)$.
2. Montrer que pour tout $k \in Z(\Omega)$,
$$P(Z \leqslant k) = P([X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]).$$
3. En déduire la valeur de de $P(Z \leqslant k)$.
4. Justifier que pour tout k,
$$P(Z = k) = P(Z \leqslant k) - P(Z \leqslant k-1).$$
5. En déduire la loi suivie par Z.

Exercice 3 Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne.

Déterminer la probabilité qu'au moins une boule rouge figure dans ce tirage.

Exercice 4 Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un six une fois sur deux. On tire un dé au hasard de la pochette et on le lance une première fois. On obtient un six. Quelle est la probabilité d'obtenir un six au lancer suivant avec le même dé ?

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire qui sur une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [0,1]$. Déterminer l'espérance de $Y = 3^X$.

Exercice 6 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sui suivent une même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On note $Z = X + Y$.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.
2. Quelle est l'espérance de Z ?
3. Montrer que pour $k \in [\![2,2n]\!]$,
$$[Z = k] = \bigcup_{i=1}^{k-1} [X = i] \cap [Y = k - i].$$

4. En déduire la loi suivie par Z.

Exercice 7 [**Loi Binomiale négative**] Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de même paramètre $p \in [0,1]$. Pour tout $k \in \{1, \ldots n\}$, appelle Z_k la variable aléatoire qui compte le rang d'apparition du k-ième succès par les variables aléatoires X_i. Si on n'atteint pas k succès, on pose $X_k = 0$.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Déterminer la loi de X_1.
3. Pour les autres valeurs de k, que vaut $X_k(\Omega)$.
4. Pour $k \leqslant m$, on note B_k^m l'événement "obtenir exactement k succès sur les m premières épreuves". Justifier que
$$P(B_k^m) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$
5. Justifier que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}, m \geqslant k, P(X_k = m) = P(B_{k-1}^{m-1}) \times p$.
6. En déduire la loi de X_k.
7. Déterminer $E(X_k)$.

PROBLÈME CONCOURS 1

On rappelle que la probabilité d'un événement B est notée P(B).

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes U_1, U_2, $U_3, \ldots$ contenant chacune deux boules blanches.

On effectue des tirages selon le protocole suivant :

1. On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1.
2. On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2.
3. On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3, et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1}, mais avant de procéder au tirage suivant. (*Pour comprendre l'expérience, n'hésitez pas à faire un dessin!*)

On pose $X_0 = 2$.

1. a) Montrer que la loi de la variable aléatoire X_1 est donnée par :

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}, P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}$$

   b) Calculer l'espérance de X_1.
2. Pour tout entier naturel k, on note A_k l'événement : *"on pioche deux boules noires dans l'urne* U_k*"*.
   Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, l'événement $(X_n = 2)$ à l'aide de certains des événements A_k et en déduire que $P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3. a) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'on a :
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2)$$
   b) Montrer ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

   c) Donner la valeur de $P(X_n = 0)$ en fonction de n.
4. a) Calculer, pour tout entier naturel n, l'espérance de X_n.
   b) Déterminer la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME CONCOURS 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'expérience suivante : dans une urne (U_n) on place n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans l'urne et on note k le numéro obtenu.

- si $k = 1$, l'expérience est terminée,
- si $k > 1$, on retire les boules numérotées de k à n de l'urne et on recommence.

• On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de tirage faits pour obtenir la boule 1.

• Pour tout k, on définit la variable aléatoire Y_k par

$$Y_k = \begin{cases} \text{le numero de la } k-\text{ième boule tirée si ce tirage a eu lieu} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

• On définit I_n la variable aléatoire du numéro de la première boule tirée.

1. Reconnaître la loi de I_n.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer
$$P_{[I_n=1]}(X_n = k).$$
3. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![2, n]\!], P_{[I_n=k]}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j - 1).$$

4. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
5. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
6. Déterminer $X_n(\Omega)$.
7. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
8. Montrer que pour tout $n \geqslant 2, j \geqslant 2$,

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1).$$

   On utilisera le système complet d'événements $([I_n = k], 1 \leqslant k \leqslant n)$.
9. Pour $n \geqslant 2, j \geqslant 2$, calculer

$$nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j).$$

   En déduire que pour tout $n \geqslant 2$ et $j \geqslant 1$,

$$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1).$$

10. Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}.$$

   En déduire $E(X_n)$ (la somme ne se simplifie pas).