TD 16 - Polynômes

1. GÉNÉRALITÉS

Exercice 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(x^3 + x^2 + x + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^k = x^{2n+3} + x^{2n+1} + x^2 + 1$$

Exercice 2 Quels sont les degrés, coefficients dominants et coefficients de plus bas degré de chacun des polynômes suivants.

1. $P(x) = x^4 - x^2(x-1)(x-2)$,
2. $P(x) = (x-2)^n$,
3. $P(x) = (x-1)^7 - (x+1)^7$,
4. $P(x) = \prod_{j=0}^n (x-j)$.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Déterminer les dérivées successives du polynôme $P(x) = (x-a)^n$.

Exercice 4 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[x]$ tels que $P \circ P = P$. On pourra commencer par chercher le degré de P .

Exercice 5 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[x]$ tels que $P \circ P = P(X^2)$. On pourra commencer par chercher le degré de P .

Exercice 6 Déterminer les couples de polynômes $(P, Q) \in \mathbf{R}[x]^2$ tels que $Q^2(x) = xP^2(x)$.

2. DIVISION DE POLYNÔMES

Exercice 7 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1$ par $x^3 + x + 2$,
2. $x^5 - 7x^4 - x^2 - 9x + 9$ par $x^2 - 5x + 4$.

Exercice 8 Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par

1. $(x-a)$,
2. $(x-a)^2$,
3. $(x-a)(x-b)$.

Exercice 9 Montrer que pour tout $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $P(x) - x$ divise $P(P(x)) - x$.

3. RACINES

Exercice 10 Trouver les racines du polynôme $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ sachant qu'il a une racine double.

Exercice 11 On considère le polynôme $P(x) = x^5 - 11x^3 + 11x^2 + 8x - 4$ Trouver l'ordre de la racine 2.

Exercice 12 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $(x - 1)^3$ divise $P(x) = nx^{n+2} - (n + 2)x^{n+1} + (n + 2)x - n$.

Exercice 13 On souhaite déterminer tous les polynômes vérifiant $P(x - 1) = P(x)$.

1. On souhaite d'abord traiter le cas où le degré de P est impair. Prouver que P admet au moins une racine.
2. Montrer que P admet une infinité de racine. Conclure.
3. Dans cette question on traite le cas où le degré de P est impair. Montrer que $P'(x) = P'(x - 1)$. En déduire que P est une fonction affine puis que P est constant.

4. FACTORISATION

Exercice 14 Factoriser dans $\mathbf{R}[x]$ les polynômes

1. $P(x) = x^4 + 1$,
2. $P(x) = x^3 - 2$.

Exercice 15 Sachant qu'il admet des racines multiples, factoriser dans $\mathbf{R}[x]$ le polynôme

$$P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - 1.$$

5. APPLICATIONS

Exercice 16

1. Réaliser la division euclidienne de $x^3 + 1$ par $x + 2$.
2. En déduire une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x + 2} \text{ sur }] - 2, +\infty[.$$

Exercice 17 On définit une matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Soit P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = x^2 - x - 6.$$

Montrer que $P(A) = 0_2$.

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Expliquer pourquoi il existe des réels a_n et b_n et un polynôme $Q \in \mathbf{R}[x]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, x^n = Q(x)P(x) + a_n x + b_n.$$

3. En évaluant cette égalité pour des valeurs de x bien choisies, déterminer a_n et b_n .

4. Justifier que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

5. Calculer A^n .

6. UN PROBLÈME CLASSIQUE : INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, f une fonction réelle définie sur un intervalle I et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts de I . On souhaite montrer le résultat suivant

Théorème 1

Sous les hypothèses précédentes, il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[x]$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(a_i) = f(a_i).$$

De façon équivalente, si on se donne des réels $b_1, \dots, b_n$, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[x]$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(a_i) = b_i.$$

Un tel polynôme s'appelle **polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points a_i** .

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit une fonction sur I par

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Montrer que L_i est une fonction polynomiale et donner son degré.

2. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $P(a_k)$.
3. Vérifier que le polynôme

$$P(x) = \sum_{i=1}^n f(a_i)L_i(x) \text{ convient.}$$

4. Soit Q un autre polynôme qui convient, en déterminant des racines de $P - Q$, montrer que nécessairement $Q = P$. Que peut-on conclure?
5. Montrer que si on n'impose plus de condition de degré, le polynôme n'est plus unique.
6. **Exemple pratique :** Déterminer le polynôme interpolateur de la Lagrange de la fonction $x \mapsto r^x$ (où $r \in \mathbf{R}_+$ est fixé) aux points $\{1, \dots, n\}$. Calculer alors $P(n+1)$