TD - Introduction aux espaces vectoriels

1. EXEMPLES D'ESPACES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 1 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? (de $\mathbf{R}^n$ ou de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

1. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbf{R}), x+2y=z \right\}$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbf{R}), y=x+1 \right\}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbf{R}), y=x \right\}$
4. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$
5. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x+y \\ y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$
6. $\{(x,x,y,y),(x,y) \in \mathbf{R}^2\}$
7. $\{(x,y,z,x+y+z),(x,y,z) \in \mathbf{R}^3\}$
8. $\{(x,y,z,x+y+z+1),(x,y,z) \in \mathbf{R}^3\}$
9. $\{(x,x^2,x^3,x^4), x \in \mathbf{R}\}$
10. $\{(x,y,z,0),(x,y,z) \in \mathbf{R}^3\}$
11. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, 5x+3y=0\}$
12. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, 5x+3y=0 \text{ et } z=y+1\}$
13. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, 5x+3y=0 \text{ et } z=y\}$

Exercice 2 Les espaces suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$?

1. Les polynômes de degré inférieur ou égal à n ?
2. Les polynômes de degrés supérieure ou égal à n ?
3. Les polynômes dont 0 n'est pas une racine ?
4. Les polynôme qui ont zéro pour racine ?
5. Les polynômes qui ont zéro pour racine simple ?
6. Les polynômes qui ont zéro pour racine exactement double ?
7. Les polynômes qui ont zéro pour racine au moins double ?
8. Les polynômes tels que $\mathrm{P}(-1)=\mathrm{P}(1)$?
9. Les polynômes tels que $\mathrm{P}(-1)=\mathrm{P}(1)^2$?
10. Les polynômes tels que $\mathrm{P}(-1)=\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)$?
11. Les polynômes vérifiant $\mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{P}(-\mathrm{X})$?

Exercice 3 Les espaces suivants sont-ils des sous espaces vectoriels des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

1. Les suites qui tendent vers 0,
2. Les suites qui tendent vers 1,
3. Les suites qui vérifient la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$,
4. Les suites qui vérifient la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$,
5. Les suites arithmétiques,
6. Les suites géométriques,
7. Les suites croissantes.

Exercice 4 Les espaces suivants sont-ils des sous espaces vectoriels des fonctions de $\mathbf{R}$ dans lui même ?

1. Les fonctions paires,
2. Les polynômes,
3. Les fonctions vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}, f(n) = f(0)$,
4. Les fonctions périodiques,
5. Les fonctions croissantes.

Exercice 5 **[Quelques exemples dans les matrices]** Soit $n \in \mathrm{N}^*$.

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, le **commutant de la matrice** M est l'ensemble des matrices
$$\mathrm{C_M} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}), \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}.$$
Montrer que $\mathrm{C_M}$ est un espace vectoriel. Trouver une matrice M telle que $\mathrm{C_M} = \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.
2. $\mathrm{N}_n = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}), \mathrm{M}^n = 0_n\}$ est l'ensemble des **matrices nilpotentes**. Montrer que N_n n'est pas un espace vectoriel. On commencera par chercher des contres exemples pour $n = 2$.
3. L'application Trace sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est définie par $\mathrm{T}r(\mathrm{M}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_{k,k}$. Montrer que $\mathrm{K}er(\mathrm{T}r) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}), \mathrm{T}r(\mathrm{M}) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. ($\mathrm{K}er(\mathrm{T}r)$ *est appelé le **noyau** de l'application Trace*).

Exercice 6 **[Des espaces vectoriels engendrés]** Dans $\mathbf{R}^3$, montrer l'égalité
$$Vect((1,2,0),(0,2,1)) = Vect((-1,-4,-1),(2,2,-1)).$$

2. FAMILLES LIBRES, FAMILLES GÉNÉRATRICES, BASES

Exercice 7 Les familles suivantes sont elles libres dans $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbf{R})$?

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Exercice 8 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Justifier.

1. $(\cos, \sin, x \mapsto 2, e^x)$ dans les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$,
2. les suites géométriques $(1^n), (2^n)$ et (3^n) dans les suites réelles ?
3. $((X-1), (X-2), (X-1)(X-2))$ dans les polynômes,
4. les matrices $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\5&0\end{pmatrix}\right)$ dans $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

Exercice 9 Soient $a_1, \dots, n$ des réels tous différents. Montrer que la famille de fonctions

$$(x \mapsto e^{a_i x}, i \in [\![1,n]\!])$$

est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On pourra factoriser par e^{a_k} où $a_k = \max(a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 10 Soient $P_0, \dots, P_n$ des polynômes tels que $\deg P_i = i$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre dans $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 11 **[Familles génératrices]** Trouver des familles génératrices des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), x+2y=z\right\}$
2. $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), x+2y=0\right\}$
3. $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), \begin{cases}x-y=z\\y=2z+x\end{cases}\right\}$
4. $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), \begin{cases}x+3y=0\\x+y+z=0\end{cases}\right\}$.
5. $\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}), \begin{cases}x+z=0\\x+y=t\end{cases}\right\}$.

Exercice 12 Trouver des familles génératrices des sous-espaces vectoriels suivants.

1. $\{P \in R_2[X], P(0) = P(1)\}$,
2. $\{P \in R_2[X], P(1) = P'(1) = 0\}$,
3. $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x = y \text{ et } z = t\}$,
4. les suites (u_n) vérifiant $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$,
5. $Vect((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$.

Exercice 13 Les familles suivantes sont elles des bases de $M_{2,1}$?

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$,
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$,
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right)$.
4. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix},\right)$.

Exercice 14 Les familles suivantes sont elles des bases de $M_{3,1}$?

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$,
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}\right)$,
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\25\\2\end{pmatrix}\right)$,
4. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 15 Déterminer des bases des sous espaces vectoriels suivants :

1. $Vect((1,1,1),(1,-1,0),(0,4,2))$ dans $\mathbf{R}^3$.
2. $Vect((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ dans $\mathbf{R}^3$.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$ dans R^3.
4. $\{P \in \mathbf{R}_n[X], P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbf{R}_n[X] (n \geqslant 2)$
5. $\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

Exercice 16 **[Avec les matrices]**

1. Déterminer une base de $\{M \in M_n(\mathbf{R}), Tr(M) = 0\}$,
2. Déterminer une base de l'ensemble des matrices symétriques,
3. Déterminer une base de l'ensemble des matrices antisymétriques.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.