TD 18 - Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice est inversible. Après avoir prouvé que c'est un espace vectoriel, déterminer la dimension de $\{X \in M_{2,1}(\mathbf{R}), MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\}$.

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit $n \geqslant 1$. Déterminer une base et la dimension de $\{P \in R_n[x], P'(0) = P(0).\}$.

Exercice 3 Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. Pour tout i, on définit un polynôme

$$L_i(x) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

   Calculer pour tout (i,j), $L_i(a_j)$. Montrer que $(L_i)_{0\leqslant i\neq n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

2. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[x]$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k(x).$$

Exercice 4 Montrer que l'ensemble des matrices qui peuvent s'écrire

$$M = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ b & a & a-b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

est un espace vectoriel. En donner une base et la dimension.

Exercice 5 Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbf{R}_3[x]$ dont 0 et 1 sont racines est un espace vectoriel. Donner une base et sa dimension.

Exercice 6 Montrer que

$$F = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M - M \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \right\}$$

est un espace vectoriel. Donner sa dimension et une base.

Exercice 7 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,2\pi]$ dans $\mathbf{R}$. On définit les fonctions $f_1,\dots f_4$ par $f_1 = \cos, f_2 = \sin, f_3(x) = x\cos(x)$ et $f_4(x) = x\sin(x)$. La famille $f_1,\dots,f_4$ est-elle libre ?

Exercice 8 Soit n. On définit

$$\mathrm{F} = \{x \in \mathbf{R}_n, x_1 = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}.$$

Montrer que F est un espace vectoriel. Déterminer une base et sa dimension.

Exercice 9 On définit

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}_2[x], \mathrm{P}(2-x) = \mathrm{P}(x)\}.$$

Montrer que c'est un espace vectoriel, donner sa dimension et une base.