TD 21 - Compléments sur la dérivation

1. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Exercice 1 Déterminer les dérivées successives des fonctions définies par

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = e^{2x+1}, \quad h(x) = \sqrt{x}.$$

On précisera l'ensemble lequel les fonctions sont de classe C^∞.

Exercice 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

En déduire pour tout $(a, \phi) \in \mathbf{R}^2$ les dérivées n-ièmes des fonctions $f : x \mapsto \cos(ax + \phi)$.

Exercice 3 Déterminer les dérivées successives des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 \cos(x), \quad g(x) = (x+1)^2 \ln(x), \quad h(x) = (x-1)^2 x^n.$$

Exercice 4 Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ des réels distincts. Déterminer la dérivée n-ième de

$$f : x \mapsto (x-a)^n (x-b)^n$$

et en déduire une formule pour

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 5 Soit f n fois dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$f(a) = 0 \text{ et } \forall k \in \{0, n-1\}, f^{(k)}(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$. On utilisera le théorème de Rolle successivement sur les dérivées de f, et on fera un dessin.

Exercice 6 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Justifier que f est de classe C^∞ sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f^{(n)}(x) = P(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

4. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

2. FORMULES DE TAYLOR

Exercice 7 Montrer que la série $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et déterminer sa somme. On appliquera la formule de Taylor à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ après avoir déterminé ses dérivées successives.

Exercice 8 Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 9 Donner une approximation de e à 10^{-2} près. On utilisera l'inégalité de Taylor pour la fonction exp.

Exercice 10 Soit f une fonction C^2 sur $\mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$. Calculer la limite lorsque h tend vers 0 de

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

Exercice 11 Montrer que, pour tout réel x

$$|\sin(x)-x| \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

En déduire la limite de

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

Exercice 12 Déterminer toutes les fonctions f n fois dérivables telles que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

Exercice 13 A l'aide d'une formule de Taylor, déterminer la limite en 0 de

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 14 Soit $x \in \mathbf{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. On utilisera une formule de Taylor pour la fonction cos entre 0 et x.