TD 22 - Compléments sur les SEV

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base et la dimension.
2. Montrer que $\text{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ est un supplémentaire de F dans E.
3. Proposer un autre supplémentaire possible.

Exercice 2 Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M$. Soient $E = \{MX, X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\}$ et $F = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), MX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

1. Montrer que $E \cap F = \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.
2. Montrer que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

   $$X - MX \in F$$

   puis que

   $$M_{n,1}(\mathbb{R}) = E + F.$$

3. Conclure que $M_n(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

Exercice 3 Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[x], P(0) = 0.\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de E et en donner un supplémentaire.

Exercice 4 Dans cet exercice $E = M_n(\mathbb{R})$. Soit $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}), Tr(M) = 0.\}$

1. Vérifier que F est un espace vectoriel.
2. Montrer que $\dim(F) = n^2 - 1$.
3. Trouver un supplémentaire de F dans E.

Exercice 5 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des fonctions impaires et G l'ensemble des fonctions paires.

1. Vérifier que G et F sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. Soit $f \in E$. Soit $g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Vérifier que $g \in G$ et $f - g \in F$.
4. En déduire que $E = F \oplus G$.