

TD 23 - Développements limités

Exercice 1 Calculer les développements limites de f en 0 dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = \cos(2x)\sin(x)$ à l'ordre 2
2. $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2
3. $f(x) = (x^2 + 1)(e^x - 1)$ à l'ordre 4
4. $f(x) = \cos(x)^2$ à l'ordre 4
5. $f(x) = \sin(x)e^x$ à l'ordre 3
6. $f(x) = \ln(1+x)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 2.
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 4.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x(\sqrt{1+x} - 1)}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^3}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3 Retour sur le prolongement continu et C^1 .

On souhaite étudier la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et qu'on a

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\ln(x)^2} (-x \ln(x) - (1-x)\ln(1-x)).$$

3. Montrer que f se prolonge en une fonction C^1 sur $[0, 1[$.

Exercice 4 Soient $\alpha, \beta > 0$, à quelle condition la série de terme général $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n^\alpha}) + \ln(1 + \frac{1}{n^\beta})$ est-elle convergente? Étudier de même la série de terme général

$$v_n = \ln(1 + \frac{1}{n^\alpha}) + \ln(1 - \frac{1}{n^\beta}).$$

Exercice 5 Retour sur le prolongement continu et C^1 - 2.

On souhaite étudier la fonction définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbf{R} .
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$. Déterminer sa dérivée f' .
3. Montrer que $f \in C^1(\mathbf{R})$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $] 1, +\infty[$ par $f(x) = e^{-2x} \ln(1+x)$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire la tangente à la courbe représentative de f et donner les positions relatives.

Exercice 7 Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent des asymptotes obliques et donner leurs équations.

1. $x \mapsto (2x-1)e^{\frac{-3}{x}}$,
2. $x \mapsto (x^2+1)\ln(1-\frac{3}{x})$,
3. $x \mapsto \sqrt{x^2+4x+5} - x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 8 On définit la suite de fonctions f_n par

$$\forall x \in] 0, +\infty[, f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}}.$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que la fonction prolongée est dérivable (à droite) en 0. Donner $f'(0)$.
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$,

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right).$$

4. En déduire que la courbe représentative de f_n admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner son équation.
5. Déterminer la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote.
6. Représenter l'allure de la courbe et de l'asymptote.

Exercice 9 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer la position relative de la courbe et de cette asymptote.

Exercice 10 Soit f une fonction paire (resp. impaire). Montrer que si f admet un DL en x_0 alors la partie régulière (polynomiale) de celui-ci est paire (respectivement impaire).