

# TD 23 - Développements limités

**Exercice 1** Calculer les développements limités de  $f$  en 0 dans chacun des cas suivants.

1.  $f(x) = \cos(2x)\sin(x)$  à l'ordre 2
2.  $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$  à l'ordre 2
3.  $f(x) = (x^2+1)(e^x-1)$  à l'ordre 4
4.  $f(x) = \cos(x)^2$  à l'ordre 4
5.  $f(x) = \sin(x)e^x$  à l'ordre 3
6.  $f(x) = \ln(1+x)\sqrt{1-x}$  à l'ordre 2.
7.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  à l'ordre 4.

**Exercice 2** Calculer les limites suivantes.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)^2}{x(\sqrt{1+x}-1)}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-e^{\sin(x)}}{x^3}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x))$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

**Exercice 3 Retour sur le prolongement continu et  $C^1$ .**

On souhaite étudier la fonction définie sur  $]0, 1[$  par  $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$ .

1. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et qu'on a

$$\forall x \in ]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\ln(x)^2} (-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)).$$

3. Montrer que  $f$  se prolonge en une fonction  $C^1$  sur  $[0, 1[$ .

**Exercice 4** Soient  $\alpha, \beta > 0$ , à quelle condition la série de terme général  $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n^\alpha}) + \ln(1 + \frac{1}{n^\beta})$  est-elle convergente? Étudier de même la série de terme général

$$v_n = \ln(1 + \frac{1}{n^\alpha}) + \ln(1 - \frac{1}{n^\beta}).$$

**Exercice 5 Retour sur le prolongement continu et  $C^1$  - 2.**

On souhaite étudier la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ . Déterminer sa dérivée  $f'$ .
3. Montrer que  $f \in C^1(\mathbf{R})$ .

**Exercice 6** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1+x)$ . Donner le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire la tangente à la courbe représentative de  $f$  et donner les positions relatives.

**Exercice 7** Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent des asymptotes obliques et donner leurs équations.

1.  $x \rightarrow (2x-1)e^{\frac{-3}{x}}$ ,
2.  $x \rightarrow (x^2+1)\ln(1-\frac{3}{x})$ ,
3.  $x \rightarrow \sqrt{x^2+4x+5} - x^2 e^{\frac{1}{x}}$ .

**Exercice 8** On définit la suite de fonctions  $f_n$  par

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}}.$$

1. Montrer que  $f$  se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que la fonction prolongée est dérivable (à droite) en 0. Donner  $f'(0)$ .
3. Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ ,

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. En déduire que la courbe représentative de  $f_n$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et donner son équation.
5. Déterminer la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote.
6. Représenter l'allure de la courbe et de l'asymptote.

**Exercice 9** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Montrer que la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3. Déterminer la position relative de la courbe et de cette asymptote.

**Exercice 10** Soit  $f$  une fonction paire (resp. impaire). Montrer que si  $f$  admet un DL en  $x_0$  alors la partie régulière (polynomiale) de celui-ci est paire (respectivement impaire).