TD 28 - Applications linéaires

1. APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1 Les applications linéaires suivantes sont-elles des endomorphismes de $M_{2,1}(\mathbf{R})$?

1. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$.
2. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y+2x \end{pmatrix}$.
3. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$.
4. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathrm{P} \in \mathbf{R}[x] \mapsto x\mathrm{P}(x) \in \mathbf{R}[x]$,
2. $f : \mathrm{P} \in \mathbf{R}[x] \mapsto \mathrm{P}(x)^2 \in \mathbf{R}[x]$,
3. $f : \mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ où $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice fixée.
4. $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a+b \\ -c & d+2a+c \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans lui même définie par

$$f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 4 Soit f l'application de $M_{3,1}(\mathbf{R})$ définie par

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ z+y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(M_{3,1}(\mathbf{R}), M_{2,1}(\mathbf{R}))$.
2. Déterminer l'image et le noyau de f.
3. f est-elle injective, surjective, inversible ?

Exercice 5 Soit S l'application de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définie par

$$(\mathrm{S}(u))_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme,
2. Déterminer l'image et le noyau de f,
3. f est-elle injective, bijective, inversible. Si oui, quel est l'isomorphisme réciproque ?

Exercice 6 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $u : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(x+1)$ est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[x]$. Donner l'automorphisme inverse. Pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbf{R}[x]$, déterminer $\mathrm{Q}(u)$.

Exercice 7 Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tels que les images des vecteurs de la base canonique sont $(1,1,1),(0,-2,7),(7,15,-21)$.

1. Déterminer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, f(x,y,z)$.
2. f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 8 **(Endomorphismes nilpotents)** Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que f est nilpotent s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $f^k = 0$.

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $Kerf^j$ est croissante pour l'inclusion.
2. Montrer que $f^n = 0$.
3. Dans cette question, on suppose que $f^{n-2} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}, (x, f(x), \dots f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Exercice 9 Soit f une application linéaire sur $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (2y-3x, 4y-6x).$$

Montrer que f est un projecteur dont on déterminera les espaces caractéristiques.

Exercice 10 Soit f_A l'application de $\mathbf{R}_n[x]$ dans $\mathbf{R}_n[x]$ définie par $u(\mathrm{P}) = \mathrm{R}$ où R est le reste de la division euclidienne de P par un polynôme A fixé.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f_\mathrm{A} = \mathbf{R}_d[x]$ où $d = \deg \mathrm{A} - 1$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f_\mathrm{A}$.
3. Montrer que f_A est un projecteur.

Exercice 11 Soient p et q deux projecteurs sur E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\operatorname{Im} p \circ q = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} p \circ q = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

2. UTILISATION DE LA DIMENSION FINIE

Exercice 12 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

1. Montrer que si u est surjective alors $m \leqslant n$.
2. Montrer que si u est injective alors $m \geqslant n$.
3. Que dire si u est un isomorphisme ?

Exercice 13 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\, u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Ker} u$.
2. Donner le rang de u.
3. Donner une base de l'image de u.

Exercice 14 **(Adapté EM Lyon 2023)** Soit ϕ et ψ deux formes linéaires **non nulles** sur un espace vectoriel E de dimension n.

1. Montrer $\operatorname{Ker}\phi \subset \operatorname{Ker}\psi$ si et seulement il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\lambda\phi = \psi$.
2. Dans cas là, démontrer que les noyaux sont égaux. Quelle est leur dimension ?
3. On se place dans le cas où on n'a pas d'inclusion entre les deux noyaux. Soit u l'application de E dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$\forall x \in \mathrm{E}, u(x) = (\phi(x), \psi(x)).$$

   Montrer que u est linéaire.
4. Montrer que u est surjective.
5. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}\phi \cap \operatorname{Ker}\psi$.
6. En déduire $\dim \operatorname{Ker}\phi \cap \operatorname{Ker}\psi$.

Exercice 15 Soit $u : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_n[x]$ définie par

$$u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(x) - x\mathrm{P}'(x).$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} u$.
2. Donner le rang de u.

Exercice 16 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{E} = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$;
2. $\mathrm{E} = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f)$;
3. $\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Im}(f)$;
4. $\operatorname{Ker}\left(f^2\right) = \operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 17 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(P) = \left(P(a_0), P'(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_n)\right).$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $Y \in M_{1,n}(\mathbf{R})$, l'application
$$\phi_Y : X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \mapsto YX$$
est un élément de $E^* = \mathscr{L}(M_{n,1}(\mathbf{R}), \mathbf{R})$.
2. Si Y n'est pas le vecteur nul, montrer que ϕ_Y est surjective.
3. Soit ϕ l'application de $M_{1,n}(\mathbf{R})$ dans E^* définie par $\phi(Y) = \phi_Y$. Montrer que $\phi \in \mathscr{L}(M_{1,n}(\mathbf{R}), E^*)$.
4. Montrer que ϕ est injective. On calculera $\phi_Y({}^tY)$.
5. En déduire que ϕ est un isomorphisme.
6. Soit $f \in E^*$. Montrer qu'il existe $Y \in M_{1,n}(\mathbf{R})$ tel que $f = \phi_Y$.

Exercice 19 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit u définie sur $E = \mathbf{R}_n[x]$ par

$$\forall P \in E, u(P) = P(x+1) - P(x).$$

1. Montrer que si $u(P) = 0$, alors P et qui si P admet une racine, alors il en admet une infinité.
2. En déduire $\operatorname{Ker} u$.
3. En déduire $\operatorname{rg} u$.
4. Montrer que $\operatorname{Im} u = \mathbf{R}_{n-1}[x]$.