TD 3 - Nombres réels

1. QUELQUES ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes, (après avoir vérifié convenablement l'ensemble de définition!)

1. $5(\frac{x}{2}-5)-2\frac{x}{3}+3=5$,
2. $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=x+\sqrt{2}$,
3. $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x-1}{x-5}$,
4. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{-x+2}{x-2}+1$,
5. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{-x+2}{x-2}$,
6. $\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}$,
7. $\sqrt{x^2+9}=2$,
8. $|x-2|=2$,
9. $|2x-3|-|2-x|=1$,
10. $\sqrt{x-3}=x+2$,
11. $x-1=\sqrt{x-1}$.

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x. λ est un paramètre réel.

1. $(\lambda^2-1)x=\lambda+1$,
2. $(\lambda^2-1)^2x^2-2(\lambda^2-1)x=-1$,
3. $(\lambda-4)x^2-2(\lambda-2)x+\lambda-1=0$.

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes

1. $(x^2-4x+3)(x-1)<0$,
2. $\frac{x^2-1}{x+3}\geqslant\frac{x+3}{x-1}$,
3. $\frac{x-2}{x-3}\leqslant\frac{x+1}{x+2}$,
4. $\frac{x-2}{x-3}\leqslant\frac{-2x+1}{x+2}$,
5. $|x-3|>5$,
6. $|-3x+1|\leqslant|x+2|$,
7. $\sqrt{x-2}>2x+2$,
8. $\sqrt{3-x}\leqslant x-4$,

Exercice 4 Résoudre l'inéquation suivante (avec un paramètre $m\in\mathbf{R}$) :

$$(m^2-1)x=m+1.$$

Exercice 5 Soient $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, montrer que $xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$.

2. BORNES

Exercice 6 Pour chacune des parties de $\mathbf{R}$ décrites, déterminer s'ils existent leur minimum, maximum, borne inférieure, borne supérieure.

1. $\mathbf{R}_+$,
2. $\mathbf{R}_-^*$,
3. $\{1,2\ldots,9\}$,
4. $]-1,2[\cup\{3\}$,
5. $\{1+2n, n\in\mathbf{N}\}$,
6. $\{1+\frac{1}{n}, n\in\mathbf{N}\}$,
7. $]1,2]\cap[\frac{3}{2},9[$,
8. $\{\frac{1}{1-x}, x\in]1,+\infty[\}$,
9. $\{\frac{1+(-1)^n}{n}, n\in\mathbf{N}^*\}$.

Exercice 7 Soient A et B deux parties majorées de $\mathbf{R}$. On définit l'ensemble $A+B=\{a+b, a\in A, b\in B\}$.

1. Montrer que $A+B$ est majoré.
2. Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure.

3. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. On suppose que A et B sont minorées. Que peut-on dire de $A+B$?
5. Dans cette dernière question, on ne suppose plus que A et B sont majorées. On suppose que $A+B$ est majorée. A-t-on nécessairement A et B majorées ?

Exercice 8 Soient A et B deux parties non-vides de R telles que : $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leqslant b$. Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

3. INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Exercice 9 Avec l'inégalité triangulaire, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$

$$|2x-3| + |6-2x| = 3.$$

Exercice 10 On considère le sous ensemble de $\mathbf{R}$:

$$A = \{\cos(a+b) - \sin(a) + \sin(b), (a,b) \in \mathbf{R}^2\}.$$

1. Montrer que $A \subset [-3,3]$,
2. Montrer que A admet un maximum.

4. PARTIE ENTIÈRE, VALEUR ABSOLUE

Exercice 11 On souhaite étudier la fonction réelle f définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
1. Montrer que f est périodique de période 1.
2. Que vaut f sur $[0,1[$.
3. En déduire les variations de f. Donner un tracé de sa courbe représentative.

   Bonus. Faire de même avec $g(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 12
1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 13 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 14 Résoudre l'inéquation $x^2 - 4|x| < 5$.