

# TD 4 - Sommes et produits

## 1. SOMMES ET PRODUITS

**Exercice 1** Écrire les quantités suivantes avec les signes somme et produit.

- $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 101$
- $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{10000}$
- $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$
- $2 + 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 6 + \dots + 2 \times 4 \times 6 \times 100.$

**Exercice 2** Calculer les sommes suivantes.

a)  $\sum_{k=p}^n k$    b)  $\prod_{k=p}^n x^k$    c)  $\sum_{k=n}^{2n} k.$

**Exercice 3** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Donner une expression des produits suivants à l'aide de factorielles.

a)  $\prod_{i=0}^n (1+i)$    b)  $\prod_{k=2}^n (k-2)$    c)  $\prod_{j=1}^n j^2(j+1).$

**Exercice 4** Calculer les sommes et produits suivants.

a)  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$    b)  $\prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right)$

c)  $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$    d)  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}.$

**Exercice 5** Calculer les sommes suivantes.

a)  $\sum_{k=0}^{2n} 3^k$    b)  $\sum_{k=0}^n kn$    c)  $\sum_{j=1}^n \sqrt{5^j}$

d)  $\sum_{k=0}^{2n} (5n+3)$    e)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$    f)  $\sum_{i=0}^n \frac{5 \times 4^i - 7 \times 2^{2i}}{3^i}.$

**Exercice 6** Calculer  $\sum_{k=0}^n (-1)^k k.$

**Exercice 7** En étudiant la fonction  $\sum_{k=0}^n x^k$  et en la dérivant de deux façons différentes, calculer la somme

$$\sum_{k=0}^n kx^k.$$

**Exercice 8**

1. Chercher une suite de la forme  $(an + b)2^n$  telle que

$$u_{n+1} - u_n = (n + 2) \cdot 2^n.$$

2. En déduire la somme

$$\sum_{k=0}^n (k + 2) \cdot 2^k.$$

## 2. FACTORIELLES, COEFFICIENTS BINOMIAUX

**Exercice 9** Soit  $x \in \mathbf{R}_+$ , montrer sans récurrence que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

**Exercice 10** Écrire comme des produits puis exprimer avec des factorielles les nombres.

1.  $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ,
2.  $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n + 1)$ .

**Exercice 11** Exprimer avec des factorielles le produit

$$\prod_{k=3}^n \left(1 - \frac{4}{k^2}\right).$$

**Exercice 12** Que vaut la somme sur une diagonale montante vers le haut et la droite dans le triangle de Pascal?

**Exercice 13** Calculer  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$  et  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ .

**Exercice 14** Calculer  $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$ .

**Exercice 15** Soient  $p$  et  $n$  deux entiers avec  $p \leq n$ , montrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

**Exercice 16** En développant  $(1 + x)^{p+q}$ , démontrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

### 3. SOMMES DOUBLES

---

**Exercice 17** Calculer

$$\text{a) } \sum_{i,j=1}^n i \quad \text{b) } \prod_{1 \leq i < j \leq n} i \quad \text{c) } \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) \quad \text{d) } \sum_{i,j=1}^n n^{i+j}.$$

**Exercice 18** Calculer

$$\text{a) } \sum_{i,j=1}^n \min(i,j) \quad \text{b) } \prod_{1 \leq i,j \leq n} ij \quad \text{c) } \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j} \quad \text{d) } \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \binom{i}{j}.$$