TD 8 - Continuité des fonctions

1. ASPECT LOCAL, PROLONGEMENT CONTINU

Exercice 1 Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x\ln(x)$ sinon. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = e^{2x}$. Quelle valeur doit-on donner à $f(0)$ pour prolonger f en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$?

Exercice 4 Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ f lorsqu'elle est définie par

1. $f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,
2. $f(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 5 Étudier la continuité de la fonction $f : x \in \mathbf{R} \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 6 Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f.

Exercice 7 Soit f la fonction sur $[-1,0[\cup]0,+\infty$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}.$$

Montrer que l'on peut prolonger$f$en une fonction continue sur $[-1,+\infty[$.

2. CALCUL DE LIMITES

Exercice 8 Calculer les limites suivantes (si elles existent).

1. $\lim_{x\to-\infty} x^4+\frac{1}{x^5}$,
2. $\lim_{x\to+\infty}(-x)^5(1+x^2)$,
3. $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$
4. $\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)\left(\frac{1}{x}\right)$,
5. $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x^5}\right)$,
6. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-5-\frac{1}{x}$.

Exercice 9 Calculer les limites suivantes (si elles existent).

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1+\sqrt{x}}$,
2. $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$,
3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$,
4. $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$,
5. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$,
6. $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{-2}+x^{-3}}{x^{-3}-x^{-4}}$.

Exercice 10 Calculer les limites suivantes (si elles existent).

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{e^x+x^2}$,
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$,
3. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x-4}\right)^2$,
4. $\lim_{x\to+\infty},\frac{(x^5)^2}{(5^x)}$,
5. $\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2^x}$
6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-\ln(x)}{e^x-x}$.

3. AUTRES EXERCICES

Exercice 11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ croissante et périodique. Montrer que f est constante.

Exercice 12 Soit f une fonction périodique qui admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x)=\sup\{\frac{x^n}{n!}, n\in\mathbb{N}\}$.

1. Vérifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est croissante.
3. Montrer que f est continue.

Exercice 14 Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ telle que f est croissante et $x\longmapsto\frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

Indication : pour x fixé, on étudiera les limites à gauche et à droite de f en x.